Universität Hamburg
Fachbereich Informatik

Diplomarbeit

Algebraische Petrinetze

BODO MÖLLER
<bmoeller@acm.org>

1. Oktober 1999

Erstbetreuer: Prof. RÜDIGER VALK
Zweitbetreuer: Prof. CHRISTOPHER HABEL

Inhaltsverzeichnis

Einführung **5**

1 Algebren **7**
1.1 Terme 7
1.2 Σ-Algebren 11
1.3 Die Kategorie Alg(Σ) zu einer Signatur 17

2 Algebraische Spezifikation durch Gleichungen **21**
2.1 $SPEC$-Algebren 21
2.2 Die Kategorie Alg($SPEC$) zu einer Gleichungsspezifikation . 32

3 Erweiterungen von Gleichungsspezifikationen **34**

4 Endlichkeitsspezifikationen **38**
4.1 $SPECF$-Algebren 38
4.2 Die Kategorie Alg($SPECF$) zu einer Endlichkeitsspezifikation 43
4.3 Erweiterungen von Endlichkeitsspezifikationen 45

5 Multimengen und gewichtete Mengen **46**

6 Gefärbte Netze **52**
6.1 Struktur 52
6.2 Verhalten 54
6.3 Invarianten 57

7 Algebraische Netze **62**

8 Lineare Invarianten **65**
8.1 Algebraische Sicht 66
8.2 Bedeutung in den Interpretationen 72

Literatur **87**

Index **91**

Einführung

Die vorliegende Diplomarbeit befaßt sich mit algebraischen Methoden zur Beschreibung und Untersuchung von gefärbten Petrinetzen. Im Gegensatz zu den üblichen Definitionen für gefärbte Petrinetze werden hier Netze mit unendlich vielen Stellen und Transitionen gestattet; unendliche Markierungen sind zulässig, auch mit unendlich vielen Marken pro Stelle; und Schaltvorgänge dürfen unendliche Nebenläufigkeit aufweisen. Das entspricht den ursprünglichen Definitionen der Petrinetze, die keine Endlichkeitsforderungen enthalten – solche werden aber oft hinzugefügt, indem z. B. alle Markierungen als Elemente eines freien Monoids angesehen werden. Bei gefärbten Petrinetzen ergeben sich Markierungen mit unendlich vielen Marken auf einer Stelle in natürlicher Weise z. B. dann, wenn für eine Stelle mit einer unendlichen Farbmenge eine *Kapazität* durch eine *komplementäre Stelle* realisiert werden soll [2].

In dieser Arbeit werden *algebraische Petrinetze* als Beschreibungen von Klassen gefärbter Petrinetze verwendet. Da beim Umgang mit der Unendlichkeit nicht alle Eigenschaften wie von den endlichen Fällen her bekannt bestehen bleiben, wird das bekannte Beschreibungsmittel der *Gleichungsspezifikationen* ergänzt zu *Endlichkeitsspezifikationen.*

In Abschnitt 1 wird der allgemeine Begriff der Σ-Algebra als Grundlage für die algebraische Spezifikation behandelt; Abschnitt 2 beschäftigt sich mit Gleichungsspezifikationen. Die Inhalte dieser beiden Abschnitte sind zum großen Teil an [24], [5], [4] und [35] orientiert. Um algebraische Spezifikation aus einer weiteren Perspektive zu betrachten, werden in Abschnitt 3 *Erweiterungen von Gleichungsspezifikationen* betrachtet. Der dort entwickelte Begriff der *vorsichtigen Erweiterung* bleibt in der vorliegenden Arbeit ohne konkrete Anwendung auf Petrinetze, sollte jedoch dabei helfen, die Möglichkeiten und Grenzen der Spezifikation durch Gleichungen kennenzulernen. Abschnitt 4 stellt das neue Konzept der Endlichkeitsspezifikationen vor.

In Abschnitt 5 werden als Voraussetzung für gefärbte und algebraische Petrinetze gewichtete Mengen und als ein Spezialfall davon Multimengen behandelt. Dabei wird schwerpunktmäßig einer Problematik nachgegangen, die erst durch das Zulassen von Unendlichkeit eine Rolle spielt und deshalb in der Petrinetz-Literatur sonst keine Erwähnung findet: Für den Umgang mit gewichteten Mengen werden einige Verträglichkeitsbegriffe eingeführt und untersucht.

Abschnitt 6 definiert den Begriff des gefärbten Petrinetzes und geht auf das Verhalten von gefärbten Petrinetzen ein. Dabei wird der Begriff der Invarianten in allgemeiner Form erörtert. Abschnitt 7 definiert, ausgehend vom Konzept der Endlichkeitsspezifikation, den Begriff des algebraischen Petrinetzes und zeigt den Zusammenhang mit gefärbten Netzen. Abschnitt 8 schließlich illustriert anhand von linearen Invarianten algebraischer Petrinetze die Motivation, bei der algebraischen Spezifikation von Petrinetzen anstatt von Gleichungsspezifikationen von Endlichkeitsspezifikationen auszugehen.

1 Algebren

Dieser Abschnitt schafft die Grundlage für die algebraische Spezifikation, indem einige der wichtigen Begriffe definiert und eine Reihe von später verwendeten Resultaten bewiesen werden. Vom Begriff der *Signatur* ausgehend werden zunächst *Terme* und *Substitutionen* (Abschnitt 1.1), dann *Algebren* und *Homomorphismen* (Abschnitt 1.2) behandelt; anschließend wird gezeigt, wie die Algebren zu einer Signatur als Objekte einer Kategorie zueinander in Beziehung gestellt werden können (Abschnitt 1.3).

In späteren Abschnitten werden weitergehende Beschreibungsmöglichkeiten für Algebren vorgestellt, dadurch ergeben sich Spezialfälle von Σ-Algebren: Spezifikation mittels *formaler Gleichungen* führt dann zu $SPEC$-Algebren (Abschnitt 2), Spezifikation durch *Endlichkeitsterme* zu $SPECF$-Algebren (Abschnitt 4).

Durchgängig werden folgende Vereinbarungen vorausgesetzt: Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen enthält die 0. Zu einer Menge S ist die disjunkte Vereinigung $S^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n$ mit $S^0 = \{\lambda\}$ die Menge der Wörter über dem Zeichenvorrat S. Für Mengen A, B ist $\mathrm{Abb}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen $A \to B$.

1.1 Terme

Terme sind nach gewissen Regeln aufgebaute *endliche beschriftete Bäume.* Eine mögliche Konstruktion dafür wird im folgenden explizit dargestellt. Bei dieser Konstruktion ist jeder Teilbaum ein *Paar,* dessen erste Komponente die Beschriftung der Wurzel des Teilbaums angibt. Die zweite Komponente enthält, falls der Baum keine weiteren Knoten besitzt (die Wurzel also selbst ein Blatt ist), die leere Menge $\emptyset$; andernfalls enthält sie ein aus den Unterbäumen der Wurzel gebildetes *n-Tupel*.

Definition 1.1. *Eine **Signatur** ist ein Paar $\Sigma = (S, \Omega)$, wobei S eine Menge ist und $\Omega = (\Omega_{w,s})_{(w,s) \in S^* \times S}$ eine Familie von paarweise disjunkten Mengen. Die Elemente von S heißen **Sorten**. Die Elemente von $\Omega_{\lambda,s}$ heißen **Konstantensymbole** der Sorte s. Die Elemente von $\Omega_{w,s}$ mit $w \neq \lambda$ heißen **Operationssymbole** der Sorte s, genauer mit **Argumentsorten** w und **Wertsorte** s.*

Zur Vereinfachung der Schreibweise steht Ω gelegentlich auch für die *Menge* $\bigcup_{(w,s) \in S^* \times S} \Omega_{w,s}$. Da die Mengen $\Omega_{w,s}$ paarweise disjunkt sind, ist für jedes $\omega \in \Omega$ klar, aus welcher Menge $\Omega_{w,s}$ es stammt. Deshalb hat man wohldefinierte Abbildungen $\mathrm{arg}\colon \Omega \to S^*$ und $\mathrm{sort}\colon \Omega \to S$, so daß $\omega \in \Omega_{\mathrm{arg}(\omega),\mathrm{sort}(\omega)}$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Definition 1.2. *Ein **Variablensystem** zu einer Signatur $\Sigma = (S, \Omega)$ ist eine Familie $X = (X_s)_{s \in S}$ von paarweise disjunkten Mengen, für die*

$$\bigcup_{s \in S} X_s \cap \bigcup_{(w,s) \in S^* \times S} \Omega_{w,s} = \emptyset$$

*gilt. Die Elemente von X_s heißen **Variablen** der Sorte s.*

Bemerkung 1.3. Ist $X = (X_s)_{s\in S}$ ein Variablensystem zu Σ und $Y = (Y_s)_{s\in S}$ eine Familie von Mengen mit $\forall\, s \in S\colon Y_s \subseteq X_s$, so ist auch Y ein Variablensystem zu Σ.

Definition 1.4. *Sei $X = (X_s)_{s\in S}$ ein Variablensystem zu einer Signatur $\Sigma = (S, \Omega)$. Die Familien $\left(\mathfrak{T}^{(m)}_{\Omega,s}(X)\right)_{s\in S}$ werden für $m \in \mathbb{N}$ induktiv wie folgt definiert: Für jedes $s \in S$ sei*

$$\mathfrak{T}^{(0)}_{\Omega,s}(X) := (X_s \cup \Omega_{\lambda,s}) \times \{\emptyset\} = \{(a, \emptyset) \mid a \in X_s \cup \Omega_{\lambda,s}\}.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ und $s \in S$ sei

$$\mathfrak{T}^{(m+1)}_{\Omega,s}(X) := \mathfrak{T}^{(0)}_{\Omega,s}(X) \cup \left\{\Omega_{w,s} \times \Big(\prod_{1\le i\le n} \mathfrak{T}^{(m)}_{\Omega,s_i}(X)\Big) \;\Big|\; s_1 \dots s_n = w \in S^*\backslash\{\lambda\}, n \ge 1\right\}.$$

Die Familie $\left(\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)\right)_{s\in S}$ wird definiert durch

$$\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathfrak{T}^{(m)}_{\Omega,s}(X)$$

*für $s \in S$. $\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ ist die Menge aller **Terme** der Sorte s über dem Variablensystem X. Die Elemente von $\mathfrak{T}_{\Omega,s} := \mathfrak{T}_{\Omega,s}((\emptyset)_{s\in S})$ heißen **Grundterme** der Sorte s.*

Bemerkung 1.5. Wie man leicht durch Induktion sieht, gilt $\mathfrak{T}^{(m)}_{\Omega,s}(X) \subseteq \mathfrak{T}^{(m+1)}_{\Omega,s}(X)$ für jedes $s \in S$ und jedes $m \in \mathbb{N}$.

Definition 1.6. *Die **Tiefe** eines Terms $T \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ ist 0, falls $T \in \mathfrak{T}^{(0)}_{\Omega,s}(X)$ gilt; andernfalls ist sie das (nach der vorhergehenden Bemerkung eindeutig bestimmte) $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ mit $T \in \mathfrak{T}^{(m)}_{\Omega,s}(X) \setminus \mathfrak{T}^{(m-1)}_{\Omega,s}(X)$.*

Hat der Term $(\omega, (T_1, \dots, T_n)) \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ die Tiefe m, so haben offensichtlich die Terme $T_1, \dots, T_n$ sämtlich Tiefen $< m$.

Die Terme $(\omega, (T_1, \dots, T_n)) \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ (wobei $T_i \in \mathfrak{T}_{\Omega,s_i}(X)$ für jedes i mit $1 \le i \le n$, $s_1 \dots s_n = \arg(\omega)$) schreibt man suggestiver in der Form

$$\omega(T_1, \dots, T_n);$$

hierbei ist ω wohlgemerkt lediglich ein Operations*symbol* und keine Abbildung. Für Terme $(a, \emptyset) \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ (wobei also $a \in X_s \cup \Omega_{\lambda,s}$ ist) schreibt man einfach a; gelegentlich schreiben wir auch $\mathrm{term}(a)$, um hervorzuheben, daß nicht das Element von $X_s \cup \Omega_{\lambda,s}$ gemeint ist, sondern der entsprechende Term der Tiefe 0. (Um $X_s \cup \Omega_{\lambda,s}$ mit $\mathfrak{T}^{(0)}_{\Omega,s}$ identifizieren zu können, wären noch zusätzliche Voraussetzungen zum Verhindern gewisser Anomalien nötig.)

Wir benutzen folgende Kurzschreibweisen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{\Omega}(X) &:= \bigcup_{s\in S} \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X),\\ \mathfrak{T}_{\Omega} &:= \bigcup_{s\in S} \mathfrak{T}_{\Omega,s}.\end{aligned}$$

Die Mengenvereinigung $\bigcup_{s\in S}\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ (und damit als Sonderfall auch $\bigcup_{s\in S}\mathfrak{T}_{\Omega,s}$) ist *disjunkt*; dies folgt aus den Disjunktheitsvoraussetzungen in den Definitionen 1.1 und 1.2. Man kann also jedem Term bei Kenntnis des zugrundeliegenden Variablensystems »ansehen«, von welcher Sorte er ist; das heißt, wir haben eine wohldefinierte Abbildung $\mathrm{sort}_X\colon \mathfrak{T}_\Omega(X)\to S$ mit $T\in\mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}_X(T)}(X)$ für jedes $T\in\mathfrak{T}_\Omega(X)$.

Definition 1.7. *Die Menge $\mathcal{U}(T)$ der **Unterterme** eines belieben Terms $T\in\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ wird wie folgt rekursiv definiert:*

- *Hat T die Tiefe 0, so ist $\mathcal{U}(T)=\{T\}$.*
- *Hat T eine Tiefe >0, also eine Darstellung $\omega(T_1,\dots,T_n)$ ($\omega\in\Omega_{w,s}$, $w=s_1\dots s_n\in S^*\backslash\{\lambda\}$, $T_i\in\mathfrak{T}_{\Omega,s_i}$ für $i\in\{1,\dots,n\}$), so ist $\mathcal{U}(T)=\{T\}\cup\mathcal{U}(T_1)\cup\dots\cup\mathcal{U}(T_n)$.*

*Ein Unterterm T' von T heißt **echter Unterterm**, wenn $T'\neq T$ ist.*

Bemerkung 1.8. Sind $X=(X_s)_{s\in S}$ und $Y=(Y_s)_{s\in S}$ Variablensysteme mit $\forall\, s\in S\colon X_s\subseteq Y_s$, so gilt $\mathfrak{T}_\Omega(X)\subseteq\mathfrak{T}_\Omega(Y)$, und sort_Y stimmt auf $\mathfrak{T}_\Omega(X)$ mit sort_X überein.

Definition 1.9. *Sei $T\in\mathfrak{T}_\Omega(X)$ ein Term über einem Variablensystem $X=(X_s)_{s\in S}$. Dann bezeichnet $\mathrm{var}(T)=\left(\mathrm{var}_s(T)\right)_{s\in S}$ das **minimale Variablensystem** des Terms T, d. h. dasjenige Variablensystem mit $\forall\, s\in S\colon \mathrm{var}_s(T)\subseteq X_s$ und $T\in\mathfrak{T}_\Omega(\mathrm{var}(T))$, das nur diejenigen Variablen enthält, die tatsächlich in T vorkommen.*

$\mathrm{var}(T)$ ist offensichtlich in jedem Fall endlich, d. h. es gibt nur endlich viele $s\in S$ mit $\mathrm{var}_s(T)\neq\emptyset$ und jede Menge $\mathrm{var}_s(T)$ ist endlich.

Definition 1.10. *Eine **Substitution** über einem Variablensystem $X=(X_s)_{s\in S}$ ist eine Familie $\sigma=(\sigma_s)_{s\in S}$ von Abbildungen $\sigma_s\colon X_s\to\mathfrak{T}_{\Omega,s}(Y)$, wobei $Y=(Y_s)_{s\in S}$ ein weiteres Variablensystem ist.*

In einem solchen Fall benutzt man auch die abkürzende Schreibweise $\sigma\colon X\to\mathfrak{T}_\Omega(Y)$. Für $\sigma_s(x)$ kann man abkürzend $\sigma(x)$ schreiben, denn die Sorte s ist durch x eindeutig festgelegt.

Definition 1.11. *Zu einer Substitution $\sigma\colon X\to\mathfrak{T}_\Omega(Y)$ definiert man rekursiv eine Familie $\overline{\sigma}=(\overline{\sigma}_s)_{s\in S}$ von Abbildungen $\overline{\sigma}_s\colon\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)\to\mathfrak{T}_{\Omega,s}(Y)$ durch*

$$\overline{\sigma}_s(\mathrm{term}(x)):=\sigma_s(x)$$

für $x\in X_s$,

$$\overline{\sigma}_s(\mathrm{term}(\omega)):=\mathrm{term}(\omega)$$

für $\omega\in\Omega_{\lambda,s}$ sowie

$$\overline{\sigma}_s(\omega(T_1,\dots,T_n)):=\omega(\overline{\sigma}_{s_1}(T_1),\dots,\overline{\sigma}_{s_n}(T_n))$$

*für $\omega\in\Omega_{w,s}$ mit $w=s_1\dots s_n\in S^n$ ($n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$) und $T_i\in\mathfrak{T}_{\Omega,s_i}(X)$. Die so erhaltene Familie $\overline{\sigma}$ bezeichnen wir als **Substitutionsauswertung**.*

Wegen der Eindeutigkeit der Sorten kann man die Familie von Abbildungen $\overline{\sigma} = (\overline{\sigma}_s)_{s\in S}$ auch zu *einer* Abbildung $\overline{\sigma}\colon \mathfrak{T}_\Omega(X) \to \mathfrak{T}_\Omega(Y)$ zusammenfassen.

Definition 1.12. *$X = (X_s)_{s\in S}$ und $Y = (Y_s)_{s\in S}$ seien Variablensysteme mit $\forall\, s \in S\colon X_s \subseteq Y_s$; $Z = (Z_s)_{s\in S}$ sei ein weiteres Variablensystem und $\sigma\colon Y \to \mathfrak{T}_\Omega(Z)$ eine Substitution. Dann ist die **Einschränkung (Restriktion)** von σ auf X definiert als $\sigma|_X := (\sigma_s|_{X_s})_{s\in S}$.*

Bemerkung 1.13. In der Situation von Definition 1.12 gilt offensichtlich $\overline{\sigma|_X}(T) = \overline{\sigma}(T)$ für alle $T \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$.

1.2 Σ-Algebren

Definition 1.14. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur. Eine **Σ-Algebra** (kurz **Algebra**, wenn der Zusammenhang eindeutig ist) ist ein Tupel $A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Für jedes $s \in S$ ist A_s eine Menge.

(ii) Für jedes $\omega \in \Omega$ mit $\arg(\omega) = \lambda$ ist $f_\omega \in A_{\mathrm{sort}(\omega)}$.

(iii) Für jedes $\omega \in \Omega$, für das $\arg(\omega) = s_1 \dots s_n \in S^n$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist, ist f_ω eine Abbildung $\prod_{1\le i\le n} A_{s_i} \to A_{\mathrm{sort}(\omega)}$.

*Für $s \in S$ heißt A_s **Trägermenge*** (carrier set) *von s. Die Elemente f_ω mit $\omega \in \Omega$ und $\arg(\omega) = \lambda$ heißen **Konstanten**. Die Abbildungen f_ω mit $\omega \in \Omega$ und $\arg(\omega) \neq \lambda$ heißen **Operationen**.*

Erwähnenswerte Sonderfälle für Σ-Algebren zu einer beliebig gegebenen Signatur enthält die folgende Definition:

Definition 1.15. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur.*

*(i) Die **triviale Σ-Algebra** Fin_Σ (kurz »**triviale Algebra**«) wird definiert als*

$$\mathrm{Fin}_\Sigma := ((\mathrm{Fin}_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$$

mit einelementigen Trägermengen $\mathrm{Fin}_s := \{\bullet\}$ für jedes s. Dabei gilt zwingend $f_\omega = \bullet$ für jedes $\omega \in \Omega_{\lambda,s}$ ($s \in S$), und die $f_\omega \in \Omega_{w,s}$ mit $w \in S^*\backslash\{\lambda\}$, $s \in S$ müssen konstante Abbildungen auf das Element $\bullet \in \mathrm{Fin}_s$ sein.

*(ii) Sei $X = (X_s)_{s\in S}$ ein Variablensystem. Bei der **Termalgebra***

$$\mathfrak{T}_\Sigma(X) := \Big(\big(\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)\big)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega}\Big)$$

über X werden die Terme als ihre eigenen Werte herangezogen: Das heißt, für alle $s \in S$ wird festgelegt

$$\forall\, \omega \in \Omega_{\lambda,s}\colon f_\omega := \mathrm{term}(\omega),$$

und für alle $w = s_1 \dots s_n \in S^*\backslash\{\lambda\}$, $s \in S$ und $\omega \in \Omega_{w,s}$

$$f_\omega\colon \prod_{1\le i\le n} \mathfrak{T}_{\Omega,s_i}(X) \to \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X),$$
$$f_\omega(T_1, \dots, T_n) := \omega(T_1, \dots, T_n).$$

(iii) Als Sonderfall davon ist

$$\mathfrak{T}_\Sigma := ((\mathfrak{T}_{\Omega,s})_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$$

*die **Termalgebra über dem leeren Variablensystem**.*

In der Literatur wird oft nicht genau getrennt zwischen den Termmengen »als solchen« einerseits und den Termalgebren andererseits. Den hier jeweils verwendeten Bezeichnungen liegt der Gedanke zugrunde, daß bei den Familien $\mathfrak{T}_{\Omega}(X)$ von Termmengen (siehe Definition 1.4) die Operationen aus Ω als »Bausteine« im Vordergrund stehen, während bei Termalgebren $\mathfrak{T}_{\Sigma}(X)$ deren Eigenschaft, ein Modell von Σ zu sein, hervorsteht.

Aus kategorientheoretischen Gründen wird die triviale Σ-Algebra auch als **finale Σ-Algebra** und die Termalgebra über dem leeren Variablensystem auch als **initiale Σ-Algebra** bezeichnet; siehe Bemerkungen 1.34 und 1.35 im nachfolgenden Abschnitt 1.3.

Bemerkung 1.16. Trägermengen müssen nicht notwendig Elemente enthalten: Falls $\mathfrak{T}_{\Omega,s} = \emptyset$ gilt, ist auch $A_s = \emptyset$ möglich; ein Beispiel dafür ist die Termalgebra über dem leeren Variablensystem in Definition 1.15 (iii). Gilt jedoch $\mathfrak{T}_{\Omega,s} \neq \emptyset$, so muß zwangsläufig $A_s \neq \emptyset$ sein.

Definition 1.17. *Sei A eine Σ-Algebra und $X = (X_s)_{s\in S}$ ein Variablensystem. Eine **Belegung** von X in der Σ-Algebra A ist eine Familie $\alpha = (\alpha_s)_{s\in S}$ von Abbildungen $\alpha_s \colon X_s \to A_s$.*

Man schreibt auch kürzer $\alpha(x)$ für $\alpha_s(x)$ (mit $x \in X_s$), da die Sorte s durch x eindeutig festgelegt ist. Demgemäß verwendet man die abkürzende Schreibweise $\alpha \colon X \to A$.

Definition 1.18. *Für eine Belegung $\alpha \colon X \to A$ wird die Familie $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_s)_{s\in S}$ von Abbildungen $\overline{\alpha}_s \colon \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) \to A_s$ rekursiv definiert durch*

$$\overline{\alpha}_s(\mathrm{term}(x)) := \alpha_s(x)$$

für $x \in X_s$,

$$\overline{\alpha}_s(\mathrm{term}(\omega)) := f_\omega$$

für $\omega \in \Omega_{\lambda,s}$ sowie

$$\overline{\alpha}_s(\omega(T_1, \ldots, T_n)) := f_\omega(\overline{\alpha}_{s_1}(T_1), \ldots, \overline{\alpha}_{s_n}(T_n))$$

*für $\omega \in \Omega_{w,s}$ mit $w = s_1 \ldots s_n \in S^n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ und $T_i \in \mathfrak{T}_{\Omega,s_i}(X)$ für $1 \leq i \leq n$. Eine solche Familie $\overline{\alpha}$ heißt **Auswertung*** (evaluation).

Hier schreibt man auch abkürzend $\overline{\alpha}(T)$ für $\overline{\alpha}_s(T)$ (mit $T \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$), denn die Sorte s ist durch T eindeutig festgelegt. Entsprechend verwendet man die Schreibweise $\overline{\alpha} \colon \mathfrak{T}_{\Omega}(X) \to A$.

Definition 1.19. *Für den Spezialfall des leeren Variablensystems $(\emptyset)_{s\in S}$ setzt man* $\mathrm{eval} := (\mathrm{eval}_s)_{s\in S}$*,* $\mathrm{eval}_s := \overline{\alpha}_s \colon \mathfrak{T}_{\Omega,s} \to A_s$ *mit der hierfür einzig möglichen Belegung $\alpha \colon (\emptyset)_{s\in S} \to A$.*

Analog zum allgemeinen Fall schreibt man $\mathrm{eval} \colon \mathfrak{T}_{\Omega} \to A$.

Ähnlich wie in Definition 1.12 für Substitutionen kann man auch für Belegungen die Einschränkung auf geeignete andere Variablensysteme definieren:

Definition 1.20. *$X = (X_s)_{s\in S}$ und $Y = (Y_s)_{s\in S}$ seien Variablensysteme mit $\forall\, s \in S\colon X_s \subseteq Y_s$, und $\alpha\colon Y \to A$ sei eine Belegung. Dann ist die* ***Einschränkung (Restriktion)*** *von α auf X definiert als $\alpha|_X := (\alpha_s|_{X_s})_{s\in S}$.*

Bemerkung 1.21. In der Situation von Definition 1.20 gilt offensichtlich $\overline{\alpha|_X}(T) = \overline{\alpha}(T)$ für alle $T \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$.

Definition 1.22. *Wie in Definition 1.18 sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur, $A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ eine Σ-Algebra und $X = (X_s)_{s\in S}$ ein Variablensystem zu Σ. Nun sei B die Menge aller Belegungen von X in A:*

$$B := \{\alpha = (\alpha_s)_{s\in S} \mid \forall\, s \in S\colon \alpha_s \in \mathrm{Abb}(X_s, A_s)\}$$

Außerdem sei $\widetilde{s} \in S$ eine beliebige Sorte. Die Abbildung

$$\mathrm{interpret}_A\colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X) \to \mathrm{Abb}(B, A_{\widetilde{s}})$$

wird definiert durch

$$\mathrm{interpret}_A(T) := (\alpha \mapsto \overline{\alpha}(T)).$$

Ist speziell X ein Variablensystem, das nur eine einzige Variable einer Sorte $s_1 \in S$ enthält – $X_{s_1} = \{x\}$ und $X_s = \emptyset$ für alle $s \in S\backslash\{s_1\}$ –, so kann man die Menge B mit der Trägermenge A_{s_1} identifizieren; damit hat man dann

$$\mathrm{interpret}_A\colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X) \to \mathrm{Abb}(A_{s_1}, A_{\widetilde{s}}).$$

Ist X das leere Variablensystem $(\emptyset)_{s\in S}$, so enthält die Menge B der Belegungen nur ein einziges Element ($(\alpha_s)_{s\in S}$, wobei die α_s Abbildungen mit leerer Definitionsmenge sind). In diesem Fall kann man $\mathrm{Abb}(B, A_{\widetilde{s}})$ mit $A_{\widetilde{s}}$ identifizieren und erhält somit Abbildungen

$$\mathrm{interpret}_A\colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}} \to A_{\widetilde{s}}.$$

Definition 1.23. *Sei Σ eine Signatur und A eine Σ-Algebra. A heißt* ***Σ-generiert*** *oder einfach* ***generiert****, wenn die Abbildungen $\mathrm{interpret}_A\colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}} \to A_{\widetilde{s}}$ für alle $\widetilde{s} \in S$ surjektiv sind. Diese Eigenschaft wird auch mit* »no junk« *beschrieben [24]: Die Algebra hat keine anderen Elemente als die, die durch Grundterme beschrieben werden können.*

Definition 1.24. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur; $A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ und $B = ((B_s)_{s\in S}, (g_\omega)_{\omega\in\Omega})$ seien Σ-Algebren. Eine Familie $\varphi = (\varphi_s)_{s\in S}$ von Abbildungen $\varphi_s\colon A_s \to B_s$ ist ein* ***Homomorphismus*** *von A nach B, wenn folgende Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind:*

(i) Für alle $s \in S$ und jedes Konstantensymbol $\omega \in \Omega_{\lambda,s}$ gilt

$$\varphi_s(f_\omega) = g_\omega.$$

(ii) Für alle $w = s_1 \dots s_n \in S^*\backslash\{\lambda\}$, $s \in S$ und jedes Operationssymbol $\omega \in \Omega_{w,s}$ gilt

$$\forall\, a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\colon \varphi_s(f_\omega(a_1, \dots, a_n)) = g_\omega(\varphi_{s_1}(a_1), \dots, \varphi_{s_n}(a_n)).$$

Abkürzend benutzt man auch die Notation $\varphi\colon A \to B$.

Definition 1.25. *Die* ***Komposition*** *von Homomorphismen $\varphi\colon A \to B$, $\psi\colon B \to C$ (wobei A, B und C Σ-Algebren seien) ist der durch $\psi \circ \varphi := (\psi_s \circ \varphi_s)_{s\in S}$ definierte Homomorphismus $A \to C$.*

Bemerkung 1.26. Daß mit φ und ψ in der Tat auch $\psi \circ \varphi$ ein Homomorphismus ist, sieht man leicht anhand der Definition 1.24.

Bemerkung 1.27. Mit dem jetzt eingeführten Begriff des Homomorphismus stellt sich nachträglich heraus, daß Substitutionsauswertungen (Definition 1.11)

$$\overline{\sigma}\colon \mathfrak{T}_\Omega(X) \to \mathfrak{T}_\Omega(Y)$$

als spezielle Homomorphismen

$$\overline{\sigma}\colon \mathfrak{T}_\Sigma(X) \to \mathfrak{T}_\Sigma(Y)$$

zwischen den entsprechenden Termalgebren angesehen werden können. Analog ist zu sehen, daß Auswertungen (Definition 1.18)

$$\overline{\alpha}\colon \mathfrak{T}_\Omega(X) \to A$$

auch als Homomorphismen

$$\overline{\alpha}\colon \mathfrak{T}_\Sigma(X) \to A$$

aufgefaßt werden können.

Satz 1.28. *Jeder Homomorphismus $\varphi = (\varphi_s)_{s\in S}\colon \mathfrak{T}_\Sigma(X) \to A$ von der Termalgebra über einem Variablensystem X in eine Σ-Algebra $A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ wird als Auswertung durch die Belegung $\alpha = (\alpha_s)_{s\in S}\colon X \to A$ induziert, welche durch*

$$\alpha_s(x) := \varphi_s(\mathrm{term}(x))$$

für alle $s \in S$, $x \in X_s$ gegeben ist.

Beweis. Seien $s \in S$ und $T \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ beliebig gegeben. Zu zeigen ist $\overline{\alpha}_s(T) = \varphi_s(T)$. Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Tiefe von T (Definition 1.6), die jeweils zu zeigende Behauptung folgt unmittelbar aus den betreffenden Definitionen:

Falls T die Tiefe 0 hat, ist entweder $T = \mathrm{term}(x)$ mit $x \in X_s$ oder $T = \mathrm{term}(\omega)$ mit $\omega \in \Omega_{\lambda,s}$. Im ersten Fall ist $\overline{\alpha}_s(T) = \alpha_s(x) = \varphi_s(T)$ nach Definition 1.18 und der Definition von α_s, im zweiten Fall ist $\overline{\alpha}_s(T) = f_\omega = \varphi_s(T)$ nach Definition 1.18 und Definitionen 1.24 und 1.15 (ii).

Ist die Tiefe von T größer als 0, so ist $T = \omega(T_1,\dots,T_n)$ mit $\omega \in \Omega_{w,s}$, $w = s_1 \dots s_n \in S^*\backslash\{\lambda\}$, wobei die Terme $T_i \in \mathfrak{T}_{\Sigma,s_i}(X)$ sämtlich eine geringere Tiefe haben als T. Nach Definition 1.18 ist

$$\overline{\alpha}_s(\omega(T_1,\dots,T_n)) = f_\omega(\overline{\alpha}_{s_1}(T_1),\dots,\overline{\alpha}_{s_n}(T_n)),$$

und nach Definitionen 1.24 und 1.15 (ii) ist

$$\varphi_s(\omega(T_1,\ldots,T_n)) = f_\omega(\varphi_{s_1}(T_1),\ldots,\varphi_{s_n}(T_n)).$$

Wegen $\overline{\alpha}_{s_i}(T_i) = \varphi_{s_i}(T_i)$ für $i \in \{1,\ldots,n\}$ (laut Induktionsvoraussetzung) folgt die Behauptung. $\square$

Definition 1.29. *Sei $\Sigma = (S,\Omega)$ eine Signatur und $A = ((A_s)_{s\in S},(f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ eine Σ-Algebra. Eine* ***Kongruenz*** *auf A ist eine Familie $\equiv\, = (\equiv_s)_{s\in S}$ von Äquivalenzrelationen $\equiv_s$ auf A_s, die für alle $w = s_1\ldots s_n \in S^*\backslash\{\lambda\}$, $s \in S$ und jedes $\omega \in \Omega_{w,s}$ folgende Verträglichkeitsbedingung erfüllt:*

$$\begin{aligned}\forall\, a_1,\widetilde{a}_1 \in A_{s_1},\ldots,a_n,\widetilde{a}_n \in A_{s_n}\colon\ [a_1 \equiv_{s_1} \widetilde{a}_1 \wedge \ldots \wedge a_n \equiv_{s_n} \widetilde{a}_n \\ \Rightarrow f_\omega(a_1,\ldots,a_n) \equiv_s f_\omega(\widetilde{a}_1,\ldots,\widetilde{a}_n)].\end{aligned}$$

Definition 1.30. *Sei $\Sigma = (S,\Omega)$ eine Signatur, $A = ((A_s)_{s\in S},(f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ eine Σ-Algebra und $\equiv\, = (\equiv_s)_{s\in S}$ eine Kongruenz auf A. Der* ***Quotient*** *von A nach $\equiv$ ist definiert als*

$$A/_{\equiv} := \left(\left(A_s/_{\equiv_s}\right)_{s\in S},(\widetilde{f}_\omega)_{\omega\in\Omega}\right),$$

wobei folgendes gilt: $A_s/_{\equiv_s}$ ist im gewöhnlichen Sinne der Quotient der Menge A_s nach der Äquivalenzrelation $\equiv_s$ (die Äquivalenzklasse von $a \in A_s$ wird im folgenden als $[a]_s$ notiert); für alle $s \in S$, $\omega \in \Omega_{\lambda,s}$ ist $\widetilde{f}_\omega = [f_\omega]_s$; und für alle $w = s_1\ldots s_n \in S^*\backslash\{\lambda\}$, $s \in S$, $\omega \in \Omega_{w,s}$ ist

$$\widetilde{f}_\omega\colon \prod_{1\le i\le n}\left(A_{s_i}/_{\equiv_{s_i}}\right) \to A_s/_{\equiv_s}$$

gegeben durch

$$\forall\, a_1 \in A_{s_1},\ldots,a_n \in A_{s_n}\colon \widetilde{f}_\omega([a_1]_{s_1},\ldots,[a_n]_{s_n}) = \left[f_\omega(a_1,\ldots,a_n)\right]_s$$

(die Wohldefiniertheit folgt aus der Verträglichkeitsbedingung für Kongruenzen, Definition 1.29).

Offenbar ist auch $A/_{\equiv}$ eine Σ-Algebra.

Bemerkung 1.31. In der Situation von Definition 1.30 bestehe die Familie $[\,.\,] = ([\,.\,]_s)_{s\in S}$ aus den kanonischen Abbildungen

$$[\,.\,]_s\colon A_s \to A_s/_{\equiv_s},$$

d. h. jedes Element von A_s werde durch $[\,.\,]_s$ auf seine Äquivalenzklasse abgebildet. Dann liegt ein Homomorphismus

$$[\,.\,]\colon A \to A/_{\equiv}$$

von Σ-Algebren vor, wie man unmittelbar an den Definitionen erkennt.

Satz 1.32. *$A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ und $B = ((B_s)_{s\in S}, (g_\omega)_{\omega\in\Omega})$ seine Σ-Algebren, $\varphi = (\varphi_s)_{s\in S}$ ein Homomorphismus $A \to B$ und $\equiv = (\equiv_s)_{s\in S}$ eine Kongruenz auf A. Es gelte*

$$\forall\, s \in S\colon\ \forall\, a, a' \in A_s\colon\ [a \equiv_s a' \ \Rightarrow\ \varphi_s(a) = \varphi_s(a')].$$

${}^{A}/_{\equiv} = \left(({}^{A_s}/_{\equiv_s})_{s\in S}, (\widetilde{f}_\omega)_{\omega\in\Omega}\right)$ und $[\,.\,] = ([\,.\,]_s)_{s\in S}$ seien gemäß Definition 1.30 bzw. Bemerkung 1.31 definiert. Unter diesen Gegebenheiten existiert genau ein Homomorphismus

$$\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_s)_{s\in S}\colon {}^{A}/_{\equiv} \to B$$

mit

$$\varphi = \widetilde{\varphi} \circ [\,.\,].$$

Beweis. Für jedes $s \in S$ ist die Abbildung $\widetilde{\varphi}_s\colon {}^{A_s}/_{\equiv_s} \to B_s$ durch die Forderung $\varphi_s = \widetilde{\varphi}_s \circ [\,.\,]_s$ eindeutig festgelegt; sind nämlich $[a], [a'] \in {}^{A_s}/_{\equiv_s}$ beliebig vorgegeben ($a, a' \in A_s$), so ist im Fall $[a] = [a']$ laut Voraussetzung auch $\varphi(a) = \varphi(a')$.

Zu zeigen bleibt, daß es sich bei der so definierten Familie $\widetilde{\varphi}$ tatsächlich um einen Homomorphismus handelt. Dies folgt direkt aus den Definitionen unter Benutzung der Voraussetzung, daß φ ein Homomorphismus $A \to B$ ist: Ist $\omega \in \Omega_{\lambda,s}$ ($s \in S$) ein beliebiges Konstantensymbol, so gilt

$$\widetilde{\varphi}_s(\widetilde{f}_\omega) = \widetilde{\varphi}_s([f_\omega]_s) = \varphi_s(f_\omega) = g_\omega;$$

ist $\omega \in \Omega_{w,s}$ ($w = s_1 \ldots s_n \in S^*\backslash\{\lambda\}$, $s \in S$) ein beliebiges Operationssymbol, so gilt für alle $[a_1] \in {}^{A_{s_1}}/_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n] \in {}^{A_{s_n}}/_{\equiv_{s_n}}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_s\Big(\widetilde{f}_\omega([a_1]_{s_1}, \ldots, [a_n]_{s_n})\Big) &= \widetilde{\varphi}_s\Big([f_\omega(a_1, \ldots, a_n)]_s\Big) \\
&= \varphi_s(f_\omega(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= g_\omega(\varphi_{s_1}(a_1), \ldots, \varphi_{s_n}(a_n)) \\
&= g_\omega\Big(\widetilde{\varphi}_{s_1}([a_1]), \ldots, \widetilde{\varphi}_{s_n}([a_n])\Big).
\end{aligned}$$

□

1.3 Die Kategorie $\mathrm{Alg}(\Sigma)$ zu einer Signatur

Kategorien stellen wir durch »hom-Mengen« dar [22], d. h. eine Kategorie $\boldsymbol{C}$ besteht aus folgendem:

(i) Einer Menge von *Objekten* (auch die Objektmenge wird mit $\boldsymbol{C}$ bezeichnet, z. B. »$a \in \boldsymbol{C}$«)[1];

(ii) einer Abbildung, die jedem Paar (a, b) von Objekten eine Menge $\mathrm{hom}(a, b)$ zuordnet; deren Elemente heißen *Morphismen* von a in b, und man schreibt $f \in \mathrm{hom}(a, b)$ oft als Pfeil: $f \colon a \to b$ oder $a \xrightarrow{f} b$ (die Morphismen sind in vielen der betrachteten Fälle, aber nicht notwendig, Abbildungen von a in b);

(iii) zu jedem Tripel (a, b, c) von Objekten einer Abbildung

$$(g, f) \mapsto g \circ_{a,b,c} f \colon \mathrm{hom}(b, c) \times \mathrm{hom}(a, b) \to \mathrm{hom}(a, c)$$

(Komposition), so daß das Assoziativgesetz

$$h \circ_{a,c,d} (g \circ_{a,b,c} f) = (h \circ_{b,c,d} g) \circ_{a,b,d} f$$

gilt; da meist klar ist, welche Komposition gemeint ist, wird einfach $g \circ f$ geschrieben für $g \circ_{a,b,c} f$, und das Assoziativgesetz macht Klammerung verzichtbar (»$h \circ g \circ f$«);

(iv) zu jedem Objekt b einem Element $1_b \in \mathrm{hom}(b, b)$, der *Identität* von b, so daß für alle $f \in \mathrm{hom}(a, b)$, $g \in \mathrm{hom}(b, c)$ (mit Objekten a, c) gilt

$$1_b \circ f = f \qquad \text{und} \qquad g \circ 1_b = g.$$

Auf die sonst oft geforderte Disjunktheitsbedingung $\mathrm{hom}(a, b) \neq \mathrm{hom}(a', b')$ für $(a, b) \neq (a', b')$ verzichten wir (sie läßt sich durch geeignetes Beschriften der Elemente der $\mathrm{hom}(a, b)$ erfüllen, d. h. durch Ersetzen von $\mathrm{hom}(a, b)$ durch $\{a\} \times \mathrm{hom}(a, b) \times \{b\}$).

Für $\mathrm{hom}(a, b)$ schreibt man auch $\mathrm{hom}_{\boldsymbol{C}}(a, b)$, um den Bezug zur jeweiligen Kategorie klarzustellen; eine andere gebräuchliche Schreibweise ist $\boldsymbol{C}(a, b)$. (Hätten wir die Disjunktheitsbedingung für hom-Mengen gefordert, so wäre für $f \in \mathrm{hom}(a, b)$ auch die Kurzschreibweise »f in $\boldsymbol{C}$« möglich, da dann Objekte $\mathrm{dom}(f)$ und $\mathrm{cod}(f)$ mit $f \in \mathrm{hom}(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$ eindeutig bestimmt wären.)

Ein Morphismus $f \in \mathrm{hom}(a, b)$ heißt **Isomorphismus**, wenn es einen Morphismus $g \in \mathrm{hom}(b, a)$ gibt mit $g \circ f = 1_a$ und $f \circ g = 1_b$. Man nennt dann die Objekte a und b zueinander **isomorph**. (g, das *Inverse* von f, ist eindeutig bestimmt: Denn ist auch $g' \in \mathrm{hom}(b, a)$ ein Inverses, d. h. $g' \circ f = 1_a$ und $f \circ g' = 1_b$, so folgt $g' = g' \circ 1_b = g' \circ f \circ g = 1_a \circ g = g$.)

Um beim Umgang mit Kategorien mengentheoretische Probleme zu vermeiden (wie das Russelsche Paradoxon »$\{x \mid x \notin x\}$«), geht man von

[1] Vielfach wird allgemeiner eine *Klasse* von Objekten zugelassen; wir folgen [22] und erlauben lediglich Mengen.

einem *Universum* aus, d. h. von einer für die jeweiligen Zwecke genügend großen Menge U, die folgende Abschlußeigenschaften erfüllt [22]:

(i) $x \in u \in U$ impliziert $x \in U$.

(ii) $u \in U \wedge v \in U$ impliziert $\{u, v\} \in U$, $(u, v) \in U$ und $u \times v \in U$.

(iii) $x \in U$ impliziert $\mathcal{P}(x) \in U$ ($\mathcal{P}(x)$ ist die *Potenzmenge* von x, d h. die Menge $\{a \mid a \subseteq x\}$) und $\bigcup x \in U$.

(iv) $\omega \in U$, wobei $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge aller endlichen Ordinalzahlen bezeichnet.

(v) Ist $f\colon a \to b$ mit $a \in U$ und $b \subseteq U$ eine surjektive Abbildung, so gilt auch $b \in U$.

Wenn, wie in der folgenden Definition, eine Menge aller Σ-Algebren heranzuziehen wäre, so ist dabei implizit stets ein geeignetes Universum vorausgesetzt; nur Σ-Algebren aus diesem Universum sind zu betrachten.

Definition 1.33. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur. Die von den Σ-Algebren mit ihren Homomorphismen (und der üblichen Komposition für Homomorphismen) gebildete Kategorie bezeichnen wir mit* $\mathrm{Alg}(\Sigma)$.

Damit liegt in der Tat eine Kategorie vor: Da die Homomorphismen Familien von Abbildungen sind und die Komposition von Homomorphismen komponentenweise durch die Komposition von Abbildungen definiert ist, ist das Assoziativgesetz erfüllt; und zu jeder Σ-Algebra A ist die Familie $\mathrm{id}_A := (\mathrm{id}_{A_s})_{s \in S}$ von konstanten Abbildungen offensichtlich ein Homomorphismus mit den für die Identität von A geforderten Eigenschaften.

Ein Objekt a einer Kategorie $\boldsymbol{C}$ heißt **initial**, wenn es für jedes Objekt b der Kategorie genau einen Morphismus von a in b gibt:

$$\forall\, b \in \boldsymbol{C}\colon \#\bigl(\hom(a, b)\bigr) = 1.$$

Ein Objekt b heißt **final**, wenn es für jedes Objekt a genau einen Morphismus von a in b gibt:

$$\forall\, a \in \boldsymbol{C}\colon \#\bigl(\hom(a, b)\bigr) = 1.$$

Eine Kategorie hat nicht notwendig initiale Objekte und hat nicht notwendig finale Objekte. Für den Fall der Existenz initialer oder finaler Objekte sieht man leicht: Alle initialen Objekte einer Kategorie sind zueinander isomorph, und alle finalen Objekte sind zueinander isomorph. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz der *universellen Eigenschaft* der initialen bzw. finalen Objekte: Sind a_1 und a_2 beide initial, so gibt es eindeutig bestimmte Morphismen $f\colon a_1 \to a_2$ und $g\colon a_2 \to a_1$; da wegen der Initialität von a_1 auch der Morphismus $a_1 \to a_1$ eindeutig bestimmt ist, gilt $g \circ f = 1_{a_1}$; entsprechend gilt auch $f \circ g = 1_{a_2}$; also sind f und g Isomorphismen. (Analog für finale Objekte.)

Aus der Eindeutigkeit der Inversen (S. 17) folgt, daß jedes Objekt, welches zu einem initialen oder finalen Objekt isomorph ist, selbst initial bzw. final ist: Sei etwa a_1 initial und a_2 isomorph zu a_1 mit Isomorphismen $a_1 \xrightarrow{f} a_2 \xrightarrow{g} a_1$; dann gilt für jedes Objekt b und das dazu eindeutig bestimmte $h_1 \in \hom(a_1, b)$ zwangsläufig $\hom(a_2, b) = \{h_1 \circ g\}$ (denn daß $h_1 \circ g \in \hom(a_2, b)$ ist, ist unmittelbar klar; und für $h_2 \in \hom(a_2, b)$ gilt $h_2 = h_2 \circ \underbrace{f \circ g}_{1_{a_2}} = h_1 \circ g$, weil $h_2 \circ f = h_1$ ist wegen $\#(\hom(a_1, b)) = 1$).

Bemerkung 1.34. In $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ ist $\mathfrak{T}_\Sigma$, die Termalgebra über dem leeren Variablensystem (siehe (iii) in Definition 1.15), initial.

Beweis. Alle Auswertungen sind Homomorphismen (Bemerkung 1.27); umgekehrt ist auch jeder Homomorphismus von einer Termalgebra in eine beliebige Σ-Algebra die Auswertung einer Belegung (siehe Satz 1.28). Da das leere Variablensystem offensichtlich genau eine Belegung in A hat, folgt $\#(\hom(\mathfrak{T}_\Sigma, A)) = 1$. Somit ist $\mathfrak{T}_\Sigma$ initial in $\mathbf{Alg}(\Sigma)$. $\square$

Bemerkung 1.35. In $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ ist Fin_Σ, die triviale Σ-Algebra (siehe (i) in Definition 1.15), final.

Beweis. Zu jeder Σ-Algebra A ist die Familie $(\mathrm{fin}_s)_{s \in S}$ von Abbildungen $\mathrm{fin}_s \colon A_s \to \{\bullet\} = \mathrm{Fin}_s$ eindeutig bestimmt. Sie ist offensichtlich ein Homomorphismus $A \to \mathrm{Fin}_\Sigma$; also gilt $\#(\hom(A, \mathrm{Fin}_\Sigma)) = 1$, und demnach ist Fin_Σ final in $\mathbf{Alg}(\Sigma)$. $\square$

$\boldsymbol{C}$ sei wieder eine beliebige Kategorie, und $C \subseteq \boldsymbol{C}$ sei eine beliebige Teilmenge. Dann heißt $a \in C$ bzw. $b \in C$ **initial in** C bzw. **final in** C, wenn

$$\forall\, b \in C \colon \#(\hom(a, b)) = 1$$

bzw.

$$\forall\, a \in C \colon \#(\hom(a, b)) = 1$$

gilt. Der Begriff der Initialität läßt sich wie folgt verallgemeinern:

Definition 1.36. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur und $X = (X_s)_{s \in S}$ ein Variablensystem zu Σ. C sei eine Teilmenge der Menge der Objekte von $\mathbf{Alg}(\Sigma)$. Eine Algebra $F = ((F_s)_{s \in S}, (\varphi_\omega)_{\omega \in \Omega}) \in C$ heißt* ***in*** C ***frei über*** *X, wenn es eine Familie $u = (u_s)_{s \in S}$ von Abbildungen $u_s \colon X_s \to F_s$ gibt, so daß zu einer vorgegebenen Algebra $A = ((A_s)_{s \in S}, (f_\omega)_{\omega \in \Omega}) \in C$ und einer vorgegeben Familie $h = (h_s)_{s \in S}$ von Abbildungen $h_s \colon X_s \to A_s$ stets genau ein Homomorphismus $\overline{h} = (\overline{h}_s) \colon F \to A$ existiert mit $\forall\, s \in S \colon\ \forall\, x \in X_s \colon h_s(x) = \overline{h}_s(u(x))$.*

F ist in C frei über dem leeren Variablensystem $(\emptyset)_{s \in S}$ genau dann, wenn F in C initial ist; für das leere Variablensystem spielen nämlich die Abbildungen u_s, h_s ($s \in S$) wegen leerer Definitionsbereiche X_s keine Rolle und es bleibt lediglich die Forderung der Existenz genau eines Homomorphismus $F \to A$. Bemerkung 1.34 ist damit ein Sonderfall der folgenden Bemerkung:

Bemerkung 1.37. Die Algebra $\mathfrak{T}_\Sigma(X)$ (siehe (ii) in Definition 1.15) ist frei über X in $\mathbf{Alg}(\Sigma)$.

Beweis. Die Abbildungen $u_s\colon X_s \to \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ seien für alle $s \in S$ durch $\forall\, x \in X_s\colon u_s(x) := \mathrm{term}(x)$ definiert. Sind nun eine Algebra A und Abbildungen $h_s\colon X_s \to A_s$ ($s \in S$) gegeben, so findet man einen Homomorphismus $\overline{h}\colon \mathfrak{T}_\Sigma(X) \to A$ als Auswertung (Definition 1.18) der Belegung $h = (h_s)_{s\in S}$, und nach Satz 1.28 ist $\overline{h}$ in der Tat auch der einzige solche Homomorphismus mit $\overline{h}(\mathrm{term}(x)) = h_s(x)$ für alle $s \in S$, $s \in X_s$. $\square$

2 Algebraische Spezifikation durch Gleichungen

Eine Signatur $\Sigma = (S, \Omega)$ erlaubt alleine kaum Aussagen darüber, welche Zusammenhänge in Σ-Algebren zwischen den durch Terme beschriebenen Elementen bestehen: Insbesondere kann man auf Gleichheit der Werte zweier Terme unter beliebigen Belegungen der vorkommenden Variablen nur dann schließen, wenn die Terme selbst gleich sind; das zeigt das Beispiel der Termalgebra. Um eine Möglichkeit zu erhalten, weitergehende Untersuchungen auf der Ebene der Terme ohne Festlegung einer bestimmten Algebra durchzuführen, kann man gewisse Forderungen an die gewünschten Algebren in Form von *formalen Gleichungen* festlegen; dies führt zum Konzept der *Gleichungsspezifikation*. In Abschnitt 2.1 werden Gleichungsspezifikationen und $SPEC$-Algebren definiert, ein Regelsystem zum formalen Ableiten neuer formaler Gleichungen aus vorgegebenen wird vorgestellt, und dessen Korrektheit und Vollständigkeit wird nachgewiesen. Abschnitt 2.2 schließt an Abschnitt 1.3 an und behandelt die Kategorie der $SPEC$-Algebren zu einer vorgegebenen Gleichungsspezifikation.

2.1 $SPEC$-Algebren

Definition 2.1. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur. Eine* ***formale Gleichung*** *(der Sorte s) bezüglich Σ ist ein Tupel (X, L, R), wobei X ein Variablensystem zu Σ ist und L, R Terme $\in \mathfrak{T}_\Omega(X)$ sind mit $\operatorname{sort}_X(L) = \operatorname{sort}_X(R)$ $(= s)$.*

Definition 2.2. *Sei $g = (X, L, R)$ eine formale Gleichung. Wir verwenden folgende Bezeichnungen für ihre Komponenten: X wird als das Variablensystem von g bezeichnet, L ist die* ***linke Seite*** *von g, R ist die* ***rechte Seite*** *von g.*

Definition 2.3. *Eine* ***Gleichungsspezifikation*** *ist ein Tupel $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$, wobei (S, Ω) eine Signatur, $\Xi = (\Xi_s)_{s \in S}$ ein Variablensystem zu (S, Ω) und G eine Menge von formalen Gleichungen bezüglich (S, Ω) ist, so daß für alle $g \in G$ das Variablensystem $X = (X_s)_{s \in S}$ von g die Forderung $\forall\, s \in S\colon X_s \subseteq \Xi_s$ erfüllt.*

Gleichungsspezifikationen werden in der Literatur oft auch als »**algebraische Spezifikationen**« bezeichnet. Entgegen der üblichen Darstellung schreiben wir schon in jeder Gleichungsspezifikation ein Variablensystem fest, das dann für sämtliche Terme als Basis genommen wird – dadurch werden Mehrdeutigkeiten hinsichtlich der Sortenzugehörigkeit der Variablen von vornherein vermieden.

Definition 2.4. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur und $A = ((A_s)_{s \in S}, (f_\omega)_{\omega \in \Omega})$ eine Σ-Algebra. Eine formale Gleichung (X, L, R) ist* ***gültig*** *in A, wenn für jede Belegung $\alpha = (\alpha_s)_{s \in S}$, $\alpha_s\colon X_s \to A_s$, die Gleichung $\overline{\alpha}(L) = \overline{\alpha}(R)$ erfüllt ist.*

Eine formale Gleichung hat man sich also als Ausdruck »$L = R$« vorzustellen, der für jede im Variablensystem X vorkommende Variable allquantifiziert ist. (Die Angabe des Variablensystems X ist dabei nicht entbehrlich: Ist nämlich $A_s = \emptyset$ für eine Sorte s, so ist jede Gleichung (X, L, R) mit $X_s \neq \emptyset$ zwangsläufig gültig in A, während eine ansonsten unveränderte Gleichung (Y, L, R) mit $Y_s = \emptyset$ nicht gültig zu sein braucht.)

Definition 2.5. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur und $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ eine Gleichungsspezifikation. Eine Σ-Algebra A heißt ein* ***Modell von*** *$SPEC$ (auch: eine $SPEC$-**Algebra**), wenn jede formale Gleichung $g \in G$ in A gültig ist.*

Die Definitionen der Begriffe *Homomorphismus, Kongruenz* und *Quotient* bleiben für die Betrachtung von $SPEC$-Algebren unverändert wie im Fall der Σ-Algebren.

Der Gültigkeitsbegriff ergibt Möglichkeiten, aus bekannten Gleichungen weitere abzuleiten, die durch die bereits bekannten Gleichungen gerechtfertigt werden. Die spätere Definition 2.11 gibt Ableitungsregeln hierfür an; die Sätze 2.12 und 2.18 zeigen die Korrektheit sowie – unter bestimmten Voraussetzungen über das Variablensystem Ξ – die Vollständigkeit dieser Regeln. Auf diesem Weg wird schließlich die Existenz initialer $SPEC$-Algebren nachgewiesen (Bemerkung 2.25).

Die Menge aller formaler Gleichungen, die zu gegebenen S, Ω und Ξ (wie in Definition 2.3) überhaupt denkbar sind, kann man wie folgt definieren:

Definition 2.6.

$$\mathcal{G}_{S,\Omega,\Xi} := \Big\{ (X, L, R) \;\Big|\; X = (X_s)_{s \in S} \quad \text{mit} \quad [\forall\, s \in S\colon X_s \subseteq \Xi_s], \\ \exists\, s \in S\colon L, R \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) \Big\}$$

Damit gilt für eine Gleichungsspezifikation (S, Ω, Ξ, G) in jedem Fall $G \subseteq \mathcal{G}_{S,\Omega,\Xi}$. Weil die zu betrachtende Gleichungsspezifikation hier als fest vorgegeben angesehen wird, können wir auch als kürzere Notation $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{S,\Omega,\Xi}$ setzen.

Daß $\Xi = (\Xi_s)_{s \in S}$ fest vorgegeben ist und die Ξ_s paarweise disjunkt sind, ermöglicht eine weitere Vereinfachung der Schreibweise: Variablensysteme $X = (X_s)_{s \in S}$ mit $X_s \subseteq \Xi_s$ für $s \in S$ kann man statt als *Familien* auch als *Teilmengen* von $\bigcup_{s \in S} \Xi_s$ auffassen. Zu einer Familie $(X_s)_{s \in S}$ gehört die Menge $X := \bigcup_{s \in S} X_s$; umgekehrt ist die zu $X \subseteq \bigcup_{s \in S} \Xi_s$ gehörende Familie $(X_s)_{s \in S}$ gegeben durch $X_s := X \cap \Xi_s$. Im folgenden sind Schreibweisen wie »$X \subseteq Y$«, »$X \cup Y$«, »$x \in X$« oder »$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$« in diesem Sinne zu verstehen.

Außerdem kann man bei $X \subseteq \Xi$ überall, wo die Abbildung sort_X verwendet wird, statt ihrer gemäß Bemerkung 1.8 auch sort_Ξ verwenden; da Ξ feststeht, schreiben wir für sort_Ξ einfach sort.

Definition 2.7. *Sei M eine Menge. Eine* ***Schlußregel*** *R auf M »mit n Prämissen« ist eine Teilmenge von $M^n \times M$ ($n \in \mathbb{N}$). Für $((a_\nu)_{1 \leq \nu \leq n}, a) \in R$ schreibt man*

$$\frac{a_1, \ldots, a_n}{a} \quad (R).$$

*Die a_ν ($1 \leq \nu \leq n$) bezeichnet man dabei als **Prämissen**, a heißt **Folgerung**.*

Definition 2.8. *Sei $\mathcal{R} = (R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Schlußregeln auf einer Menge M, und die Familie $(n_i)_{i \in I}$ von natürlichen Zahlen gebe die jeweiligen Prämissenanzahlen an (das heißt $R_i \subseteq M^{n_i} \times M$ für $i \in I$). Weiter sei $a \in M$. Ein **formaler Beweis** für a (auch: eine **Ableitung** von a) aus den **Axiomen** $A \subseteq M$ mit dem **Regelsystem** $\mathcal{R}$ ist eine endliche Folge*

$$a_1, \ldots, a_k$$

(mit $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$), so daß $a_k = a$ gilt und für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a_j \in A$

(ii) Es existiert ein $i \in I$ und eine Familie $(j_\nu)_{1 \leq \nu \leq n_i}$ von natürlichen Zahlen mit $1 \leq j_\nu < j$, so daß

$$\frac{a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n_i}}}{a_j} \quad (R_i)$$

gilt.

*k wird als **Länge** des Beweises bezeichnet. Wenn es einen Beweis für a aus A mit $\mathcal{R}$ gibt, heißt a **beweisbar** (auch: **ableitbar**). Dafür schreibt man kurz $A \vdash_{\mathcal{R}} a$.*

Definition 2.9. *Sei $\mathcal{R}$ ein Regelsystem auf M. Für beliebige Teilmengen $A \subseteq M$ setzt man*

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) := \{a \in M \mid A \vdash_{\mathcal{R}} a\}$$

*und nennt $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$ den **Abschluß*** (closure) *von A.*

Bemerkung 2.10. $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}} \colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ ist damit in der Tat ein *Abschlußoperator* (auch: *Hüllenoperator),* das heißt, $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}$ hat folgende Eigenschaften (wie man leicht nachprüft):

(i) *Extensionalität:* Für $A \subseteq M$ gilt $A \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$.

(ii) *Monotonie:* Für $A, B \subseteq M$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(B)$.

(iii) *Idempotenz:* Für $A \subseteq M$ gilt $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)) = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$.

Auf diese Eigenschaften, namentlich auf (iii), wird in folgenden Beweisen zurückgegriffen, ohne dies jeweils explizit kenntlichzumachen.

Definition 2.11. *Die Schlußregeln*

$$\begin{aligned}
R_{\mathsf{refl}} &\subseteq \mathcal{G}^0 \times \mathcal{G}, \\
R_{\mathsf{symm}} &\subseteq \mathcal{G}^1 \times \mathcal{G}, \\
R_{\mathsf{trans}} &\subseteq \mathcal{G}^2 \times \mathcal{G}, \\
R_{\mathsf{subst}_1} &\subseteq \mathcal{G}^1 \times \mathcal{G}, \\
R_{\mathsf{subst}_2} &\subseteq \mathcal{G}^1 \times \mathcal{G}
\end{aligned}$$

auf der Menge $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{S,\Omega,\Xi}$ der formalen Gleichungen enthalten jeweils genau diejenigen Elemente, die sich durch die im folgenden angegebenen Darstellungen ergeben.

- Reflexivität: *Es gilt*

$$\frac{}{(X, T, T)} \quad (R_{\mathsf{refl}})$$

für alle Variablensysteme $X \subseteq \Xi$ und alle $T \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$.

- Symmetrie: *Es gilt*

$$\frac{(X, T_1, T_2)}{(X, T_2, T_1)} \quad (R_{\mathsf{symm}})$$

für alle Variablensysteme $X \subseteq \Xi$ und alle $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$ mit $\mathrm{sort}(T_1) = \mathrm{sort}(T_2)$.

- Transitivität: *Es gilt*

$$\frac{(X, T_1, T_2),\ (X, T_2, T_3)}{(X, T_1, T_3)} \quad (R_{\mathsf{trans}})$$

für alle Variablensysteme $X \subseteq \Xi$ und alle $T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$ mit $\mathrm{sort}(T_1) = \mathrm{sort}(T_2) = \mathrm{sort}(T_3)$.

- Einfache Substitution: *Es gilt*

$$\frac{(X, T_1, T_2)}{(Y, \overline{\sigma}(T_1), \overline{\sigma}(T_2))} \quad (R_{\mathsf{subst}_1})$$

für alle Variablensysteme $X, Y \subseteq \Xi$, alle $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$ mit $\mathrm{sort}(T_1) = \mathrm{sort}(T_2)$ *und alle Substitutionen $\sigma\colon X \to \mathfrak{T}_\Omega(Y)$ (siehe Definition 1.10 und Definition 1.11).*

- Doppelte Substitution: *Es gilt*

$$\frac{(Y, T_1, T_2)}{(X \cup Y, \overline{\sigma_1}(T), \overline{\sigma_2}(T))} \quad (R_{\mathsf{subst}_2})$$

für alle Variablensysteme $X, Y \subseteq \Xi$, alle $T \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$, $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}_\Omega(Y)$ mit $\mathrm{sort}(T_1) = \mathrm{sort}(T_2)$ *und Substitutionen $\sigma_1, \sigma_2\colon X \to \mathfrak{T}_\Omega(X \cup Y)$ (siehe Definition 1.10 und Definition 1.11), die für jedes $x \in X$ die Bedingung*

$$\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \quad \vee \quad [\sigma_1(x) = T_1 \wedge \sigma_2(x) = T_2]$$

erfüllen.

$\mathcal{R} := (R_i)_{i \in \{\mathsf{refl}, \mathsf{symm}, \mathsf{trans}, \mathsf{subst}_1, \mathsf{subst}_2\}}$ *sei das aus diesen Schlußregeln bestehende Regelsystem. Da diese Definition von den zugrundeliegenden Mengen S und Ω sowie vom Variablensystem Ξ abhängt, schreiben wir für $\mathcal{R}$ auch genauer $\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}$.*

Satz 2.12. *Das in Definition 2.11 angegebene Regelsystem* $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}$ *ist* ***korrekt*** (sound): *Ist* $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ *eine Gleichungsspezifikation,* $g \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$ *und* A *eine beliebige* $SPEC$*-Algebra, so ist* g *gültig in* A.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß für jedes R_i ($i \in \{\mathsf{refl}, \mathsf{symm}, \mathsf{trans}, \mathsf{subst}_1, \mathsf{subst}_2\}$) für beliebige in A gültige formale Gleichungen $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{G}$ (wobei n die Prämissenanzahl von R_i sei) und für $g \in \mathcal{G}$ mit

$$\frac{g_1, \ldots, g_n}{g} \quad (R_i)$$

auch die formale Gleichung g in A gültig sein muß; denn durch Induktion über die Längen (Definition 2.8) der Beweise von beliebigen $g \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$ folgt daraus die Behauptung des Satzes.

Es seien also $i, g_1, \ldots, g_n$ und g gegeben. Im einzelnen seien die Benennungen so wie im jeweiligen Fall der Definition 2.11. Weiter sei α eine beliebige Belegung des Variablensystems von g. Zu zeigen ist, daß die Auswertung $\overline{\alpha}$ für die linke Seite von g den gleichen Wert ergibt wie für die rechte Seite von g.

- $i = \mathsf{refl}$: $\overline{\alpha}(T) = \overline{\alpha}(T)$ ist klar.
- $i = \mathsf{symm}$: Nach der Voraussetzung über die Gültigkeit der formalen Gleichung (X, T_1, T_2) in A, die das gleiche Variablensystem hat wie (X, T_2, T_1), ist in der Tat $\overline{\alpha}(T_2) = \overline{\alpha}(T_1)$.
- $i = \mathsf{trans}$: Weil (X, T_1, T_2) und (X, T_2, T_3) in A gültig sind, ist $\overline{\alpha}(T_1) = \overline{\alpha}(T_2) = \overline{\alpha}(T_3)$.
- $i = \mathsf{subst}_1$: Die zu betrachtende Situation (gemäß Definition 2.11) ist

  $$\frac{(X, T_1, T_2)}{(Y, \overline{\sigma}(T_1), \overline{\sigma}(T_2))} \quad (R_{\mathsf{subst}_1})$$

  mit einer beliebig vorgegebenen Substitution $\sigma\colon X \to \mathfrak{T}_\Omega(Y)$. Durch $\varphi := (\varphi_s)_{s \in S} := (\overline{\alpha}_s \circ \overline{\sigma}_s)_{s \in S}$ definiert man (nach Bemerkung 1.26 und Bemerkung 1.27) einen Homomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{T}_\Sigma(X) \to A$. Gemäß Satz 1.28 ist φ die Auswertung der Belegung $\overline{\alpha} \circ \sigma := (\overline{\alpha}_s \circ \sigma_s)_{s \in S}$ von X in A. Laut Voraussetzung ist (X, T_1, T_2) gültig in A; also ist $\varphi_s(T_1) = \varphi_s(T_2)$ für $s = \mathrm{sort}(T_1)$, das heißt $\overline{\alpha}_s(\overline{\sigma}_s(T_1)) = \overline{\alpha}_s(\overline{\sigma}_s(T_2))$.
- $i = \mathsf{subst}_2$: Nach Definition 2.11 sind Situationen

  $$\frac{(Y, T_1, T_2)}{(X \cup Y, \overline{\sigma_1}(T), \overline{\sigma_2}(T))} \quad (R_{\mathsf{subst}_2})$$

  zu betrachten, wobei die Substitutionen $\sigma_1, \sigma_2\colon X \to \mathfrak{T}_\Omega(X \cup Y)$ für alle $x \in X$ die Bedingung

  $$\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \quad \vee \quad [\sigma_1(x) = T_1 \wedge \sigma_2(x) = T_2] \qquad (2.1)$$

erfüllen. Wir zeigen durch Induktion über die Tiefe (Definition 1.6) von T, daß für *alle* $T \in \mathfrak{T}_\Omega(X)$

$$\overline{\alpha}(\overline{\sigma_1}(T)) = \overline{\alpha}(\overline{\sigma_2}(T)) \tag{2.2}$$

ist.

Hat T die Tiefe 0, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Ist $T = \operatorname{term}(\omega)$ mit einem $\omega \in \Omega_{\lambda,\operatorname{sort}(T)}$, so ist $\overline{\sigma_1}(T) = \overline{\sigma_2}(T)$, und also gilt (2.2).
- Ist $T = \operatorname{term}(x)$ mit einem $x \in X_{\operatorname{sort}(T)}$ und gilt $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, so gilt offensichtlich auch (2.2).
- Wegen (2.1) bleibt sonst nur der Fall $T = \operatorname{term}(x)$ mit einem $x \in X_{\operatorname{sort}(t)}$, für das $\sigma_1(x) = T_1$ und $\sigma_2(x) = T_2$ ist. Wegen der vorausgesetzten Gültigkeit der formalen Gleichung (Y, T_1, T_2) in A ist $\overline{\alpha|_Y}(T_1) = \overline{\alpha|_Y}(T_2)$. Für $j \in \{1, 2\}$ ist

  $$\overline{\alpha}(\overline{\sigma_j}(T)) = \overline{\alpha}(\sigma_j(x)) = \overline{\alpha}(T_j) = \overline{\alpha|_Y}(T_j)$$

  laut Bemerkung 1.21. Also gilt (2.2).

Hat T eine Tiefe > 0, so hat es die Form $T = \omega(T_1, \ldots, T_n)$, und dabei gilt die Behauptung laut Induktionsvoraussetzung für die Terme $T_1, \ldots, T_n$ wegen deren geringerer Tiefe; das heißt, es ist $\overline{\alpha}(\overline{\sigma_1}(T_j)) = \overline{\alpha}(\overline{\sigma_2}(T_j))$ für $1 \leq j \leq n$. Nach Definition 1.11 und Definition 1.18 folgt daraus

$$\overline{\alpha}\Big(\overline{\sigma_1}(\omega(T_1, \ldots, T_n))\Big) = \overline{\alpha}\Big(\overline{\sigma_2}(\omega(T_1, \ldots, T_n))\Big),$$

also (2.2).

Damit sind alle Möglichkeiten für i untersucht. □

Definition 2.13. *Sei $\Xi = (\Xi_s)_{s \in S}$ ein Variablensystem zu einer Signatur (Σ, Ω). Ξ heißt* ***gesättigt****, wenn für jedes $s' \in S$ und jedes $w = s_1 \ldots s_n \in S^* \backslash \{\lambda\}$, für das ein $s \in S$ existiert mit $\Omega_{w,s} \neq \emptyset$, die Menge Ξ_s mindestens*

$$\#\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid s_i = s'\}$$

Elemente hat.

Definition 2.14. *$SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ sei eine Gleichungsspezifikation mit einem (bezüglich (S, Ω))* gesättigten *Ξ, und es sei $X \subseteq \Xi$ ein Variablensystem. Dann wird die Familie*

$$\equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)} = \left(\equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}\right)_{s \in S}$$

von zweistelligen Relationen $\equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$ auf $\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ definiert durch

$$T_1 \equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)} T_2 \quad :\Leftrightarrow \quad (X, T_1, T_2) \in \operatorname{cl}_{\mathcal{R}}(G)$$

für $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$.

Satz 2.15. *Die in Definition 2.14 festgelegte Familie* $\equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$ *ist eine* Kongruenz *(Definition 1.29) auf der* Σ*-Algebra* $\mathfrak{T}_\Sigma(X)$ *(Definition 1.15).*

Beweis. Daß die Relationen $\equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$ Äquivalenzrelationen sind, sieht man direkt an den Regeln R_{refl}, R_{symm} und R_{trans} aus Definition 2.11.

Indem wir außerdem die Regel R_{subst_2} heranziehen, zeigen wir, daß $\equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$ in der Tat eine *Kongruenz* ist: Dafür sei $\omega \in \Omega_{w,s}$ ($w = s_1 \dots s_n \in S^* \backslash \{\lambda\}$, $s \in S$) beliebig gegeben, und für $j \in \{1, \dots, n\}$ seien $T_j, \widetilde{T}_j \in \mathfrak{T}_{\Omega,s_j}(X)$ Terme mit $T_j \equiv_{G,s_j}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)} \widetilde{T}_j$ (das heißt $(X, T_j, \widetilde{T}_j) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$). Zu zeigen ist, daß daraus $\omega(T_1, \dots, T_n) \equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)} \omega(\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_n)$, also anders geschrieben

$$(X, \omega(T_1, \dots, T_n), \omega(\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_n)) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G) \tag{2.3}$$

folgt. Dafür werden wir im folgenden nachweisen, daß

$$\begin{array}{r}
(X, \omega(T_1, \dots, T_n), \omega(\widetilde{T}_1, T_2 \dots, T_n)) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G) \\
\vdots \\
(X, \omega(\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_{k-1}, T_k, \dots, T_n), \omega(\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_k, T_{k+1}, \dots, T_n)) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G) \\
\vdots \\
(X, \omega(\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_{n-1}, T_n), \omega(\widetilde{T}_1, \dots, \widetilde{T}_n)) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)
\end{array}$$

gilt – also, zusammengefaßt notiert: Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$(X, \omega(L_1^k, \dots, L_n^k), \omega(R_1^k, \dots, R_n^k)) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G) \tag{2.4}$$

mit

- $L_j^k := R_j^k := \widetilde{T}_j$ für $j < k$,
- $L_j^k := R_j^k := T_j$ für $j > k$,
- $L_k^k := T_k$ und $R_k^k := \widetilde{T}_k$.

Aus diesen n formalen Gleichungen erhält man durch $n - 1$ Anwendungen der Regel R_{trans}, daß in der Tat (2.3) gilt.

Zu zeigen bleibt noch (2.4). Dafür seien $y_1 \in \Xi_{s_1}, \dots, y_n \in \Xi_{s_n}$ paarweise verschiedene Variablen – daß hierfür in Ξ von jeder Sorte genügend Variablen vorhanden sind, wird durch Definition 2.13 gewährleistet – und $Y \subseteq \Xi$ das aus diesen Variablen gebildete Variablensystem: $Y := \{y_1, \dots, y_n\}$. Wir setzen $T := \omega(y_1, \dots, y_n)$. Nun seien Substitutionen $\sigma_1, \sigma_2 \colon Y \to \mathfrak{T}_\Omega(X)$ festgelegt durch $\sigma_1(y_j) := L_j^k$, $\sigma_2(y_j) := R_j^k$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Für $j \neq k$ gilt damit $\sigma_1(y_j) = \sigma_2(y_j)$, und es ist $\sigma_1(y_k) = T_k$ sowie $\sigma_2(y_k) = \widetilde{T}_k$. Wegen der Voraussetzung $(X, T_k, \widetilde{T}_k) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$ darf also die Regel R_{subst_2} wie folgt angewendet werden:

$$\frac{(X, T_k, \widetilde{T}_k)}{(X \cup Y, \underbrace{\omega(L_1^k, \dots, L_n^k)}_{=\overline{\sigma_1}(T)}, \underbrace{\omega(R_1^k, \dots, R_n^k)}_{=\overline{\sigma_2}(T)})} \quad (R_{\mathsf{subst}_2})$$

Um von dieser Folgerung zu (2.4) zu gelangen, sei $\sigma\colon X \cup Y \to \mathfrak{T}_\Omega(X)$ eine Substitution mit $\sigma(x) := \mathrm{term}(x)$ für $x \in X$. Für $y \in Y$ mit $y \notin X$ kann $\sigma(y)$ beliebig aus $\mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}(y)}(X)$ gewählt werden (die Bedingung $\mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}(y)}(X) \neq \emptyset$, so daß ein σ der gewünschten Art tatsächlich existiert, ist erfüllt; denn es gilt $T_j \in \mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}(y)}(X)$ für das j mit $y_j = y$). Terme aus $\mathfrak{T}_\Omega(X)$ werden durch $\overline{\sigma}$ nicht verändert, also folgt jetzt

$$\frac{(X \cup Y, \omega(L_1^k, \ldots, L_n^k), \omega(R_1^k, \ldots, R_n^k))}{(X, \omega(L_1^k, \ldots, L_n^k), \omega(R_1^k, \ldots, R_n^k))} \quad (R_{\mathsf{subst}_1}),$$

und somit gilt (2.4). □

Definition 2.16. *In der Situation von Definition 2.14 setzt man weiter*

$$\mathfrak{T}_{SPEC}(X) := \mathfrak{T}_\Sigma(X) \Big/ \equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$$

(siehe Definition 1.30); für jedes $s \in S$ setzt man dabei

$$\mathfrak{T}_{SPEC,s}(X) := \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) \Big/ \equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}.$$

Satz 2.17. *$\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$ ist eine $SPEC$-Algebra.*

Beweis. Klar ist wegen der Definition als Quotient aus einer Σ-Algebra und einer Kongruenz darauf, daß $\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$ eine Σ-Algebra ist. Zu zeigen ist, daß alle formalen Gleichungen aus G in $\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$ gültig sind. Dafür sei eine beliebige Gleichung $(Y, L, R) \in G$ vorgegeben mit einem Variablensystem $Y = (Y_s)_{s\in S}$; und $\alpha = (\alpha_s)_{s\in S}$, $\alpha_s\colon Y_s \to \mathfrak{T}_{SPEC,s}(X)$, sei eine beliebige Belegung von Y in $\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$. Zu zeigen ist jetzt, daß $\overline{\alpha}(L) = \overline{\alpha}(R)$ ist.

Zunächst sei zu α eine Substitution $\sigma = (\sigma_s)_{s\in S}\colon Y \to \mathfrak{T}_\Omega(X)$ so gewählt, daß

$$\forall\, y \in Y\colon\ [\sigma(y)]_{\mathrm{sort}(y)} = \alpha(y)$$

ist; hierbei bezeichnet $[\sigma(y)]_{\mathrm{sort}(y)}$ entsprechend Definition 1.30 die Äquivalenzklasse von $\sigma(y) \in \mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}(y)}(X)$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\equiv_{G,\mathrm{sort}(y)}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$. Nun stellen wir fest, daß der Homomorphismus

$$\overline{\alpha}\colon \mathfrak{T}_\Sigma(Y) \to \mathfrak{T}_{SPEC}(X)$$

die Komposition $[\,.\,] \circ \overline{\sigma}$ der Homomorphismen

$$\overline{\sigma}\colon \mathfrak{T}_\Sigma(Y) \to \mathfrak{T}_\Sigma(X)$$

und

$$[\,.\,]\colon \mathfrak{T}_\Sigma(X) \to \mathfrak{T}_{SPEC}(X)$$

ist, wobei $[\,.\,] = ([\,.\,]_s)_{s\in S}$ gemäß Bemerkung 1.31 von der Kongruenz $\equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$ induziert wird. Das heißt, für jedes $T \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(Y)$, $s \in S$ beliebig, gilt $\overline{\alpha}(T) = [\overline{\sigma}(T)]_s$. Dies sieht man mit Induktion über die Tiefe (Definition 1.6) von T an den Definitionen von $\overline{\alpha}$ und $\overline{\sigma}$ (Definition 1.18 und 1.11).

Wegen $(Y, L, R) \in G$ ergibt sich $G \vdash_{\mathcal{R}} (X, \overline{\sigma}(L), \overline{\sigma}(R))$ laut Definition 2.8 mit der Schlußregel R_{subst_1} aus Definition 2.11. Also ist gemäß Definition 2.14 $\overline{\sigma}(L) \equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}_{G,\mathrm{sort}(L)} \overline{\sigma}(R)$, d. h. $\left[\overline{\sigma}(L)\right]_s = \left[\overline{\sigma}(R)\right]_s$ (mit $s := \mathrm{sort}(L) = \mathrm{sort}(R)$). Wegen $\overline{\alpha}(L) = \left[\overline{\sigma}(L)\right]_s$ und $\overline{\alpha}(R) = \left[\overline{\sigma}(R)\right]_s$ folgt hieraus die Behauptung. □

Satz 2.18. *Das in Definition 2.11 angegebene Regelsystem $\mathcal{R}$ ist* ***vollständig*** (complete) *für Gleichungsspezifikationen $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$, bei denen das Variablensystem Ξ* gesättigt *(Definition 2.13) ist: Ist $g \in \mathcal{G}_{S,\Omega,\Xi}$ eine formale Gleichung, die in* jeder *$SPEC$-Algebra gültig ist, so ist $g \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$.*

Beweis. Sei $g = (X, T_1, T_2)$, $s = \mathrm{sort}(T_1)$ $(= \mathrm{sort}(T_2))$. Wir betrachten die $SPEC$-Algebra $\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$. Der Satz ist bewiesen, wenn man gezeigt hat, daß im Fall $g \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$ die formale Gleichung g nicht in $\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$ gültig ist.

Für die Belegung $\alpha\colon X \to \mathfrak{T}_{SPEC}(X)$ mit $\alpha(x) = \left[\mathrm{term}(x)\right]_{\mathrm{sort}(x)}$ für alle $x \in X$ ergibt sich $\overline{\alpha}(T_1) = [T_1]_s$ und $\overline{\alpha}(T_2) = [T_2]_s$ (wie man mit Definition 1.30 leicht sieht). Aus der Annahme $g \notin \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$ folgt $T_1 \not\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}_{G,s} T_2$, das heißt $[T_1]_s \neq [T_2]_s$. Somit ist $\overline{\alpha}(T_1) \neq \overline{\alpha}(T_2)$, und also ist (X, T_1, T_2) nicht gültig in $\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$. □

Beispiel 2.19. Wir zeigen eine Gleichungsspezifikation, die den Begriff der *kommutativen Gruppe* ausdrückt. Für formale Gleichungen (X, L, R) schreiben wir dabei suggestiver $X\colon L = R$. Bei Termen verwenden wir für zweistellige Operationssymbole eine Infixschreibweise, d. h. $T_1 + T_2$ steht für $+(T_1, T_2)$. Klammern werden gesetzt, soweit dies zur Eindeutigkeit der Baumdarstellung der Terme nötig ist; z. B. steht $T_1 + (T_2 + T_3)$ für $+(T_1, +(T_2, T_3))$.

Sei $\Sigma := (S, \Omega)$ mit $S := \{s_1\}$, $\Omega_{\lambda,s_1} := \{0\}$, $\Omega_{s_1,s_1} := \{-\}$, $\Omega_{s_1s_1,s_1} := \{+\}$ und mit $\Omega_{w,s_1} := \emptyset$ für alle $w \in S^* \setminus \{\lambda, s_1, s_1s_1\}$. Weiter sei $\Xi := (\Xi_s)_{s \in S}$ mit der einzigen Komponente $\Xi_{s_1} := \{x, y, z\}$, und es sei

$$
\begin{aligned}
G := \Big\{ \{x\}\colon &\qquad x + 0 = x, \\
\{x\}\colon &\qquad x + (-x) = 0, \\
\{x, y\}\colon &\qquad x + y = y + x, \\
\{x, y, z\}\colon &\qquad (x + y) + z = x + (y + z) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Schließlich sei $SPEC := (S, \Omega, \Xi, G)$.

Eine Σ-Algebra $A := \left((A_s)_{s \in S}, (f_\omega)_{\omega \in \Omega}\right)$ ist genau dann ein Modell dieser Gleichungsspezifikation $SPEC$, wenn die Menge A_{s_1} mit der Operation $f_+\colon A \times A \to A$ die Struktur einer kommutativen Gruppe hat, wobei $f_0 \in A_{s_1}$ das Nullelement dieser Gruppe ist und $f_-\colon A_{s_1} \to A_{s_1}$ jedem Element von A_{s_1} sein Inverses zuordnet.

Als einfaches Beispiel für einen formalen Beweis zeigen wir die Schritte einer Herleitung von $(\{x\}\colon (-x) + x = 0)$:

$$
\frac{(\{x, y\}, x + y, y + x)}{(\{x\}, (-x) + x, x + (-x))} \quad (R_{\mathsf{subst}_1})
$$

$$\frac{(\{x\}, (-x) + x, x + (-x)),\ (\{x\}, x + (-x), 0)}{(\{x\}, (-x) + x, 0)} \quad (R_{\mathsf{trans}})$$

Beispiel 2.20. Auf Basis von Beispiel 2.19 geben wir nun eine Gleichungsspezifikation an, deren Modelle aus zwei kommutativen Gruppen bestehen und einen Gruppenhomomorphismus von der ersten in die zweite dieser Gruppen enthalten.

Es sei $\Sigma := (S, \Omega)$ mit $S := \{s_1, s_2\}$,

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda,s_1} &:= \{0_1\}, & \Omega_{\lambda,s_2} &:= \{0_2\}, \\ \Omega_{s_1,s_1} &:= \{-_1\}, & \Omega_{s_2,s_2} &:= \{-_2\}, \\ \Omega_{s_1 s_1,s_1} &:= \{+_1\}, & \Omega_{s_2 s_2,s_2} &:= \{+_2\}, \\ \Omega_{s_1,s_2} &:= \{\varphi\} \end{aligned}$$

und mit $\Omega_{w,s} := \emptyset$ für alle anderen (w, s). Nun sei $\Xi := (\Xi_s)_{s \in S}$ mit $\Xi_{s_1} := \{x_1, y_1, z_1\}$ und $\Xi_{s_2} := \{x_2, y_2, z_2\}$, und die Menge G der formalen Gleichungen sei definiert durch

$$\begin{aligned} G := \Big\{ \{x_1\}\colon & \quad x_1 +_1 0_1 = x_1, \\ \{x_2\}\colon & \quad x_2 +_2 0_2 = x_2, \\ \{x_1\}\colon & \quad x_1 +_1 (-x_1) = 0_1, \\ \{x_2\}\colon & \quad x_2 +_2 (-x_2) = 0_2, \\ \{x_1, y_1\}\colon & \quad x_1 +_1 y_1 = y_1 +_1 x_1, \\ \{x_2, y_2\}\colon & \quad x_2 +_2 y_2 = y_2 +_2 x_2, \\ \{x_1, y_1, z_1\}\colon & \quad (x_1 +_1 y_1) +_1 z_1 = x_1 +_1 (y_1 +_1 z_1), \\ \{x_2, y_2, z_2\}\colon & \quad (x_2 +_2 y_2) +_2 z_2 = x_2 +_2 (y_2 +_2 z_2), \\ \{x_1, y_1\}\colon & \quad \varphi(x_1 +_1 y_1) = \varphi(x_1) +_2 \varphi(y_1) \Big\}. \end{aligned}$$

Beispiele für Modelle von $\mathit{SPEC} := (S, \Omega, \Xi, G)$ sind die Σ-Algebren $A := ((A_s)_{s \in S}, (f_\omega)_{\omega \in \Omega})$ mit

$$A_{s_1} := \mathbb{Z}/_{n_1 \mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad A_{s_2} := \mathbb{Z}/_{n_2 \mathbb{Z}},$$

wobei $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen sind mit $n_2 \mid n_1$ (hierbei ist auch $n_1 = 0$ zugelassen – für diesen Fall sei $\forall\, n_2 \in \mathbb{Z}\colon n_2 \mid 0$ und $\mathbb{Z}/_{0\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ vereinbart), und jeweils den natürlichen Additionen f_{+_1}, f_{+_2}, den natürlichen Nullelementen f_{0_1}, f_{0_2} und den natürlichen Inversenabbildungen f_{-_1}, f_{-_2} und beliebigen Gruppenhomomorphismen

$$f_\varphi\colon \mathbb{Z}/_{n_1 \mathbb{Z}} \to A_{s_2} := \mathbb{Z}/_{n_2 \mathbb{Z}},$$

z. B. der natürlichen Projektion

$$f_\varphi\colon x + n_1 \mathbb{Z} \mapsto x + n_2 \mathbb{Z}$$

oder der konstanten Abbildung

$$f_\varphi\colon x + n_1 \mathbb{Z} \mapsto 0 + n_2 \mathbb{Z}.$$

Beispiel 2.21. Wir ergänzen das vorangegangene Beispiel 2.20 noch um ein zusätzliches Konstantensymbol 1_1 für die erste Sorte sowie um eine formale Gleichung für die zweite Sorte, die besagt, daß alle Elemente der zweiten Gruppe eine Gleichung der Form $a+a=0$ erfüllen sollen, d. h. jedes Element außer dem Nullelement muß die Ordnung 2 haben.

Hier sei $\mathit{SPEC} := (S, \Omega, \Xi, G)$ mit $S := \{s_1, s_2\}$,

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda,s_1} &:= \{0_1, 1_1\}, & \Omega_{\lambda,s_2} &:= \{0_2\}, \\ \Omega_{s_1,s_1} &:= \{-_1\}, & \Omega_{s_2,s_2} &:= \{-_2\}, \\ \Omega_{s_1 s_1,s_1} &:= \{+_1\}, & \Omega_{s_2 s_2,s_2} &:= \{+_2\}, \\ \Omega_{s_1,s_2} &:= \{\varphi\}, \end{aligned}$$

$\Omega_{w,s} := \emptyset$ für alle anderen (w, s), $\Xi := (\Xi_s)_{s \in S}$ mit $\Xi_{s_1} := \{x_1, y_1, z_1\}$ und $\Xi_{s_2} := \{x_2, y_2, z_2\}$,

$$\begin{aligned} G := \Big\{ \{x_1\}\colon &\quad & x_1 +_1 0_1 &= x_1, \\ \{x_2\}\colon && x_2 +_2 0_2 &= x_2, \\ \{x_1\}\colon && x_1 +_1 (-x_1) &= 0_1, \\ \{x_2\}\colon && x_2 +_2 (-x_2) &= 0_2, \\ \{x_1, y_1\}\colon && x_1 +_1 y_1 &= y_1 +_1 x_1, \\ \{x_2, y_2\}\colon && x_2 +_2 y_2 &= y_2 +_2 x_2, \\ \{x_1, y_1, z_1\}\colon && (x_1 +_1 y_1) +_1 z_1 &= x_1 +_1 (y_1 +_1 z_1), \\ \{x_2, y_2, z_2\}\colon && (x_2 +_2 y_2) +_2 z_2 &= x_2 +_2 (y_2 +_2 z_2), \\ \{x_1, y_1\}\colon && \varphi(x_1 +_1 y_1) &= \varphi(x_1) +_2 \varphi(y_1), \\ \{x_2\}\colon && x_2 +_2 x_2 &= 0_2 \Big\}. \end{aligned}$$

Von den in Beispiel 2.20 angegebenen Modellen bleiben diejenigen mit $n_2 = 1$ oder $n_2 = 2$ bestehen. Die hinzugekommene Konstante $f_{1_1} \in \mathbb{Z}/_{n_1}\mathbb{Z}$ kann in jedem Fall beliebig gewählt werden, da sie in keine der Gleichungen eingeht.

2.2 Die Kategorie $\mathrm{Alg}(SPEC)$ zu einer Gleichungsspezifikation

Eine **Unterkategorie** einer Kategorie $\boldsymbol{C}$ ist eine Kategorie $\boldsymbol{C}'$, die folgende Voraussetzungen erfüllt:

- Die Menge der Objekte von $\boldsymbol{C}'$ ist eine Teilmenge der Menge der Objekte von $\boldsymbol{C}$;
- für $a, b \in \boldsymbol{C}'$ ist $\hom_{\boldsymbol{C}'}(a, b) \subseteq \hom_{\boldsymbol{C}}(a, b)$;
- für $a, b, c \in \boldsymbol{C}'$, $f \in \hom_{\boldsymbol{C}'}(a, b)$, $g \in \hom_{\boldsymbol{C}'}(b, c)$ ist $g \circ f$ in der Kategorie $\boldsymbol{C}'$ das gleiche wie in $\boldsymbol{C}$.

Gilt hierbei $\hom_{\boldsymbol{C}'}(a, b) = \hom_{\boldsymbol{C}}(a, b)$ für alle $a, b \in \boldsymbol{C}'$, so heißt $\boldsymbol{C}'$ eine **volle Unterkategorie** von $\boldsymbol{C}$.

Definition 2.22. *Sei $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ eine Gleichungsspezifikation und $\Sigma = (S, \Omega)$ die zugrundeliegende Signatur. Mit $\mathbf{Alg}(SPEC)$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ (Definition 1.33) mit denjenigen Objekten von $\mathbf{Alg}(\Sigma)$, die Modelle von $SPEC$ sind.*

Bemerkung 2.23. Für jede Gleichungsspezifikation $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ haben $SPEC$ und $SPEC_{\mathrm{cl}} := (S, \Omega, \Xi, \mathrm{cl}_{\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}}(G))$ die gleichen Modelle, also

$$\mathbf{Alg}(SPEC) = \mathbf{Alg}(SPEC_{\mathrm{cl}}).$$

Diese Aussage ist eine Neuformulierung der Feststellung, daß das Regelsystem $\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}$ korrekt ist (Satz 2.12).

Bemerkung 2.24. Seien $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ und $SPEC' = (S, \Omega, \Xi', G)$ Gleichungsspezifikationen mit $\Xi = (\Xi_s)_{s \in S}$, $\Xi' = (\Xi'_s)_{s \in S}$, $\forall\, s \in S\colon \Xi_s \subseteq \Xi'_s$. Dann haben $SPEC$ und $SPEC'$ die gleichen Modelle:

$$\mathbf{Alg}(SPEC) = \mathbf{Alg}(SPEC')$$

In $\mathbf{Alg}(SPEC)$ gibt es initiale und finale Algebren:

Bemerkung 2.25. Sei $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ eine Gleichungsspezifikation. Es kann o. B. d. A. angenommen werden, daß das Variablensystem Ξ gesättigt ist; denn es existiert offensichtlich in jedem Fall ein Variablensystem Ξ', das sowohl die Voraussetzungen der Bemerkung 2.24 erfüllt, so daß $\mathbf{Alg}((S, \Omega, \Xi, G)) = \mathbf{Alg}((S, \Omega, \Xi', G))$ ist, als auch den Anforderungen des Sättigungsbegriffs (Definition 2.13) genügt. Die somit gemäß Definition 2.16 gegebene Algebra $\mathfrak{T}_{SPEC} := \mathfrak{T}_{SPEC}(\emptyset)$ (wobei $\emptyset$ das leere Variablensystem $(\emptyset)_{s \in S}$ bezeichnet) ist eine **initiale** $SPEC$**-Algebra**; für den Beweis wird auf die nachfolgende, allgemeinere Bemerkung 2.26 verwiesen.

Die finale Σ-Algebra Fin_Σ (S. 12) ist offensichtlich auch in $\mathbf{Alg}(SPEC)$ final.

Bemerkung 2.26. $X \subseteq \Xi$ sei ein Variablensysten (Ξ sei dabei wieder o. B. d. A. gesättigt). Dann ist $\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$ in $\mathbf{Alg}(SPEC)$ frei über X (Definition 1.36).

Beweis. $[\,.\,] = \big([\,.\,]_s\big)_{s\in S}$ sei die Familie der kanonischen Abbildungen (Bemerkung 1.31) zur Kongruenz $\equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$ (Definition 2.14) auf der Σ-Algebra $\mathfrak{T}_\Sigma(X)$. Die Familie $u = (u_s)_{s\in S}$ von Abbildungen $u_s\colon X_s \to \mathfrak{T}_{SPEC,s}(X)$ sei definiert durch $u_s(x) := \big[\mathrm{term}(x)\big]_s$ für alle $x \in X_s$. Eine $SPEC$-Algebra $A = \big((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega}\big)$ und eine Familie $h = (h_s)_{s\in S}$ von Abbildungen $h_s\colon X_s \to A_s$ seien beliebig vorgegeben.

$\mathfrak{T}_\Sigma(X)$ ist frei über X in $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ (Bemerkung 1.37); demzufolge gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi = (\varphi_s)_{s\in S}\colon \mathfrak{T}_\Sigma(X) \to A$ mit $\varphi_s(\mathrm{term}(x)) = h_s(x)$ für alle $s \in S$, $x \in X_s$. Da A eine $SPEC$-Algebra ist, gilt

$$\forall\, s \in S\colon\ \forall\, T, T' \in \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)\colon\ \Big[T \equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)} T' \ \Rightarrow\ \varphi_s(T) = \varphi_s(T')\Big];$$

also läßt sich Satz 1.32 anwenden: Demnach gibt es genau einen Homomorphismus

$$\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_s)_{s\in S}\colon\ \mathfrak{T}_\Sigma(X) \Big/ {\equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}} = \mathfrak{T}_{SPEC}(X) \to A$$

mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ [\,.\,]$.

Ein Homomorphismus $\overline{h}\colon \mathfrak{T}_{SPEC}(X) \to A$ erfüllt genau dann die Bedingung

$$\forall\, s \in S\colon\ \forall\, x \in X_s\colon\ h_s(x) = \overline{h}_s\Big(\big[\mathrm{term}(x)\big]_s\Big),$$

also

$$\forall\, s \in S\colon\ \forall\, x \in X_s\colon\ h_s(x) = \big(\overline{h}_s \circ [\,.\,]_s\big)\big(\mathrm{term}(x)\big),$$

wenn $\overline{h} \circ [\,.\,] = \varphi$ ist; dies folgt aus der bereits erwähnten Eindeutigkeit von φ. Somit erfüllt $\overline{h} := \widetilde{\varphi}$ das gemäß Definition 1.36 Verlangte und ist eindeutig bestimmt. □

3 Erweiterungen von Gleichungsspezifikationen

Wir haben gesehen, wie mittels des Regelsystems für formale Gleichungen (Definition 2.11) zu einer Gleichungsspezifikation $SPEC$ Eigenschaften gefunden werden können, die sämtlichen $SPEC$-Algebren gemein sind: Nach Satz 2.18 über die Vollständigkeit des Regelsystems läßt sich jede formale Gleichung ableiten, die in allen $SPEC$-Algebren gültig ist. Es kann jedoch weitere auf alle $SPEC$-Algebren zutreffende Eigenschaften von Interesse geben, die hierdurch nicht erfaßt sind – denn manche Eigenschaft läßt sich gar nicht erst als formale Gleichung aus $\mathcal{G}_{S,\Omega,\Xi}$ ausdrücken.

Beispiel 3.1. Die folgende Gleichungsspezifikation beschreibt *Halbgruppen mit neutralem Element*: Sei $SPEC_0 = (S_0, \Omega_0, \Xi_0, G_0)$ mit $S_0 := \{s_0\}$, $\Omega_0 = (\Omega_{w,s})_{(w,s)\in S_0^*\times S_0}$, $\Omega_{\lambda,s_0} := \{1\}$, $\Omega_{s_0 s_0,s_0} := \{\cdot\}$ und $\Omega_{w,s_0} := \emptyset$ für $w \in S_0^* \setminus \{\lambda, s_0 s_0\}$, $\Xi_0 := (\Xi_s)_{s\in S}$ mit der einzigen Komponente $\Xi_{s_0} := \{x, y, z\}$ und

$$G_0 := \Big\{ \{x\} \colon \quad x \cdot 1 = x, \quad \{x\} \colon \quad 1 \cdot x = x, \quad \{x, y, z\} \colon \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \Big\}$$

(wobei die formalen Gleichungen wie in Beispiel 2.19 erläutert notiert sind). Anders als bei Gruppen muß in Halbgruppen mit neutralem Element nicht jedes Element Inverse haben. Deshalb läßt sich die bekannte Tatsache, daß – die jeweilige Existenz vorausgesetzt – ein Linksinverses und ein Rechtsinverses eines Elements zwangsläufig gleich sind, nicht durch eine formale Gleichung ausdrücken; der Vollständigkeitssatz hilft hier nicht weiter.

Eine Möglichkeit, derartige weitergehende Tatsachen auszudrücken und formal zu beweisen, ergibt sich durch die Zuhilfenahme geeigneter *Erweiterungen* der ursprünglichen Spezifikation.

Definition 3.2. *Seien $\Sigma_0 = (S_0, \Omega_0)$ und $\Sigma_1 = (S_1, \Omega_1)$ ($\Omega_i = (\Omega^i_{w,s})_{(w,s)\in S_i^*\times S_i}$ für $i \in \{0, 1\}$) Signaturen mit $S_0 \subseteq S_1$ und $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ (d. h. für $w \in S_0^*$ und $s \in S_0$ gelte stets $\Omega^0_{w,s} \subseteq \Omega^1_{w,s}$). Dann wird Σ_0 als **Subsignatur** von Σ_1 bezeichnet, und Σ_1 heißt **Erweiterung** der Signatur Σ_0.*

Definition 3.3. *$SPEC_0 = (S_0, \Omega_0, \Xi_0, G_0)$ und $SPEC_1 = (S_1, \Omega_1, \Xi_1, G_1)$ seien Gleichungsspezifikationen mit $S_0 \subseteq S_1$, $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$, $\Xi_0 \subseteq \Xi_1$ und $G_0 \subseteq G_1$ (insbesondere sei also (S_0, Ω_0) eine Subsignatur von (S_1, Ω_1)). Dann wird $SPEC_0$ als **Subspezifikation** von $SPEC_1$ und $SPEC_1$ als **Erweiterung** der Gleichungsspezifikation $SPEC_0$ bezeichnet.*

Definition 3.4. *Es seien Signaturen $\Sigma_0 = (S_0, \Omega_0)$ und $\Sigma_1 = (S_1, \Omega_1)$ gegeben; Σ_1 sei einer Erweiterung von Σ_0. Nun sei $A_1 = ((A_s)_{s\in S_1}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega_1})$ eine Σ_1-Algebra. Die durch*

$$(A_1)_{\Sigma_0} := ((A_s)_{s\in S_0}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega_0})$$

definierte Σ_0-Algebra heißt ***Einschränkung*** *von A_1 auf Σ_0.*

Speziell seien Σ_0 und Σ_1 die Signaturen aus Gleichungsspezifikationen $SPEC_0 = (S_0, \Omega_0, \Xi_0, G_0)$ und $SPEC_1 = (S_1, \Omega_1, \Xi_1, G_1)$, $SPEC_1$ eine Erweiterung von $SPEC_0$ und A_1 eine $SPEC_1$-Algebra. Unter diesen Voraussetzungen ist $(A_1)_{\Sigma_0}$ notwendig eine $SPEC_0$-Algebra (die Gültigkeit aller zu betrachtenden formalen Gleichungen folgt aus der Voraussetzung $G_0 \subseteq G_1$); man schreibt dann für $(A_1)_{\Sigma_0}$ auch $(A_1)_{SPEC_0}$ und bezeichnet es als Einschränkung von A_1 auf $SPEC_0$.

Von Interesse sind für uns solche Erweiterungen $SPEC_1$ einer vorgegebenen Gleichungsspezifikation $SPEC_0$, deren Modelle durch Einschränkung auf $SPEC_0$ genau alle Modelle von $SPEC_0$ ergeben: Damit haben nämlich alle aus $SPEC_1$ gefolgerten formalen Gleichungen eine Bedeutung für jede $SPEC_0$-Algebra.

»Konservative Erweiterungen« im Sinne von [5], Def. 6.12 (S. 152), erfüllen unsere Anforderung nicht: An solche wird lediglich gefordert, daß der Homomorphismus

$$\mathfrak{T}_{SPEC_0} \to (\mathfrak{T}_{SPEC_1})_{SPEC_0}$$

von der initialen $SPEC_0$-Algebra in die Einschränkung der initialen $SPEC_1$-Algebra auf $SPEC_0$ bijektiv sein soll. Damit bleiben diejenigen Elemente der Trägermengen der Algebren außen vor, die nicht durch einen Grundterm beschrieben werden können:

Beispiel 3.5. $SPEC_0 := (S, \Omega, \Xi, G_0)$ und $SPEC_1 := (S, \Omega, \Xi, G_1)$ seien die Gleichungsspezifikationen mit $S := \{s\}$, $\Omega := (\Omega_{w,s})_{(w,s) \in S^* \times S}$, $\Omega_{\lambda,s} := \{1\}$, $\Omega_{w,s} := \emptyset$ für $w \in S^* \setminus \{\lambda\}$, $G_0 := \emptyset$ und $G_1 := \{x, y \colon x = y\}$. Dann ist $\mathfrak{T}_{\Omega,s} = \{\mathrm{term}(1)\}$, und somit sind $\mathfrak{T}_{SPEC_0,s}$ und $\mathfrak{T}_{SPEC_1,s}$ (Definition 2.16) beide einelementig; da es keine weitere Sorte gibt, ist der Homomorphismus $\mathfrak{T}_{SPEC_0} \to (\mathfrak{T}_{SPEC_1})_{SPEC_0}$ bijektiv. Es liegt also eine konservative Erweiterung vor. Jedoch gibt es $SPEC_0$-Algebren, in denen die Trägermenge von s mehrere Elemente enthält; diese können keine Einschränkungen von $SPEC_1$-Algebren sein, denn in $SPEC_1$-Algebren hat die Trägermenge von s infolge der Gleichung »$x = y$« stets nur ein Element.

(Nur, wenn man lediglich *generierte* Algebren (Definition 1.23) in Betracht zieht, leistet die Definition der konservativen Erweiterungen das hier von uns Gewünschte.)

Wir benutzen folgende Definition:

Definition 3.6. *Die Gleichungsspezifikation $SPEC_1 = (S_1, \Omega_1, \Xi_1, G_1)$ sei eine Erweiterung der Gleichungsspezifikation $SPEC_0 = (S_0, \Omega_0, \Xi_0, G_0)$ ($\Omega_i = (\Omega^i_{w,s})_{(w,s) \in \S_i^* \times S_i}$ für $i \in \{0, 1\}$). Wir nennen $SPEC_1$ eine* ***vorsichtige Erweiterung*** *von $SPEC_0$, wenn die folgenden Anforderungen erfüllt sind:*

(i) Neue Sorten haben keine Konstantensymbole: Für alle $s \in S_1 \setminus S_0$ ist $\Omega^1_{\lambda,s} = \emptyset$.

(ii) Neue Operationssymbole gibt es nur, soweit eine der Argumentsorten neu ist: Für $w \in S_0^*$, $s \in S_1$ gilt $\Omega^1_{w,s} = \Omega^0_{w,s}$ bei $s \in S_0$ und $\Omega^1_{w,s} = \emptyset$ bei $s \in S_1 \setminus S_0$.

(iii) Neue Gleichungen enthalten neue Operationssymbole: Für $g \in G_1 \setminus G_0$ kommt in der linken oder in der rechten Seite von g ein Operationssymbol aus einem $\Omega^1_{w,s}$ mit $w \in S_1^* \setminus S_0^*$, $s \in S_1$ vor.

Ist $SPEC_1$ eine vorsichtige Erweiterung von $SPEC_0$, so läßt sich zu einer beliebig vorgegebenen $SPEC_0$-Algebra A_0 stets eine $SPEC_1$-Algebra A_1 finden, deren Einschränkung auf $SPEC_0$ gerade A_0 ist: Es gibt nämlich immer die Möglichkeit, für sämtliche Trägermengen von Sorten aus $S_1 \setminus S_0$ die leere Menge zu wählen (und alle Trägermengen der übrigen Sorten aus A_0 zu übernehmen, wie Definition 3.4 es in jedem Fall erzwingt); die hinzugekommenen Operationssymbole spielen dann keine Rolle, so daß auch die hinzugekommenen formalen Gleichungen unbeachtlich bleiben. Über $SPEC_1$-Algebren, die nicht in dieser Weise trivial sind, kann man dagegen mit aus $SPEC_1$ gefolgerten formalen Gleichungen gegebenenfalls zusätzliche Erkenntnisse über A_0 erlangen.

Beispiel 3.7. Wir erweitern die Gleichungsspezifikation $SPEC_0$ aus Beispiel 3.1 zur Gleichungsspezifikation $SPEC_1 := (S_1, \Omega_1, \Xi_1, G_1)$ mit $S_1 := \{s_0, s_1\}$, $\Omega_1 := (\Omega_{w,s})_{(w,s)\in S_1^* \times S_1}$ mit der neuen Komponente $\Omega_{s_1,s_0} := \{\varphi, \varphi_\mathrm{L}, \varphi_\mathrm{R}\}$ (die übrigen Komponenten von Ω bleiben, soweit sie nicht schon in Beispiel 3.1 festgelegt wurden, leer), $\Xi_1 := (\Xi_s)_{s\in S}$ mit $\Xi_{s_1} := \{x_1\}$ (Ξ_{s_0} wie in Beispiel 3.1),

$$G_1 := G_0 \cup \Big\{ \{x_1\}\colon \quad \varphi_\mathrm{L}(x_1)\cdot\varphi(x_1) = 1, \qquad \{x_1\}\colon \quad \varphi(x_1)\cdot\varphi_\mathrm{R}(x_1) = 1 \Big\}.$$

Nun lassen sich mit dem Regelsystem für formale Gleichungen leicht folgende Kongruenzen (siehe Definition 2.14) zeigen:

$$\begin{aligned}
\varphi_\mathrm{L}(x_1) &\equiv^{\mathfrak{T}_{\Sigma_1}(\{x_1\})}_{G_1,s_0} \varphi_\mathrm{L}(x_1)\cdot 1 \\
&\equiv^{\mathfrak{T}_{\Sigma_1}(\{x_1\})}_{G_1,s_0} \varphi_\mathrm{L}(x_1)\cdot(\varphi(x_1)\cdot\varphi_\mathrm{R}(x_1)) \\
&\equiv^{\mathfrak{T}_{\Sigma_1}(\{x_1\})}_{G_1,s_0} (\varphi_\mathrm{L}(x_1)\cdot\varphi(x_1))\cdot\varphi_\mathrm{R}(x_1) \\
&\equiv^{\mathfrak{T}_{\Sigma_1}(\{x_1\})}_{G_1,s_0} 1\cdot\varphi_\mathrm{R}(x_1) \\
&\equiv^{\mathfrak{T}_{\Sigma_1}(\{x_1\})}_{G_1,s_0} \varphi_\mathrm{R}(x_1)
\end{aligned}$$

Es ist also $(\{x_1\}, \varphi_\mathrm{L}(x_1), \varphi_\mathrm{R}(x_1)) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}_{S_1,\Omega_1,\Xi_1}}(G_1)$.

In Modellen $A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ von $SPEC_1$ ist A_{s_0}, da eine vorsichtige Erweiterung der Gleichungsspezifikation $SPEC_0$ vorliegt, genau wie in Beispiel 3.1 eine Halbgruppe mit der Multiplikation $f_.$ und dem neutralen Element f_1; die neue Trägermenge A_{s_1} kann beliebig festgelegt werden, und die Operationen $f_\varphi, f_{\varphi_\mathrm{L}}, f_{\varphi_\mathrm{R}}\colon A_{s_1} \to A_{s_0}$ müssen dazu so gewählt werden, daß

$$\forall\, a_1 \in A_{s_1}\colon f_.(f_{\varphi_\mathrm{L}}(a_1), f_\varphi(a_1)) = f_1 = f_.(f_\varphi(a_1), f_{\varphi_\mathrm{R}}(a_1))$$

gilt. Die oben hergeleitete formale Gleichung besagt (laut Satz 2.12 über die Korrektheit des Regelsystems für formale Gleichungen), daß unter diesen Gegebenheiten

$$\forall\, a_1 \in A_{s_1} \colon f_{\varphi_{\mathrm{L}}}(a_1) = f_{\varphi_{\mathrm{R}}}(a_1)$$

ist. Entfernt man sich nun von der Ebene der formalen Gleichungen und beschränkt sich auf einelementige Mengen $A_{s_1} = \{a_1\}$, so kann man diese Schlußfolgerungen mit $a := f_{\varphi}(a_1)$, $a_{\mathrm{L}} := f_{\varphi_{\mathrm{L}}}(a_1)$, $a_{\mathrm{R}} := f_{\varphi_{\mathrm{R}}}(a_1)$ auch lesen als

$$\forall\, a, a_{\mathrm{L}}, a_{\mathrm{R}} \in A_{s_0} \colon \left[f_{\cdot}(a_{\mathrm{L}}, a) = f_1 = f_{\cdot}(a, a_{\mathrm{R}}) \;\Rightarrow\; a_{\mathrm{L}} = a_{\mathrm{R}} \right];$$

die Erweiterung des ursprünglichen Gleichungssystems um die neue Sorte s_1 und die Operationssymbole $\varphi, \varphi_{\mathrm{L}}, \varphi_{\mathrm{R}} \in \Omega_{s_1, s_0}$ entspricht also grob einem solchen Allquantor.

4 Endlichkeitsspezifikationen

Im Hinblick auf unser Vorhaben, algebraisch beschriebene Petrinetze mit möglicherweise unendlich nebenläufigen Schaltvorgängen zu untersuchen, sind Gleichungsspezifikationen noch nicht ausreichend, wie ein späteres Beispiel illustrieren wird. Zur angemessenen Behandlung benötigen wir zusätzliche Beschreibungsmittel, um die Unendlichkeit in den Griff bekommen zu können. Hierzu führt Abschnitt 4.1 dieser Arbeit den Begriff des *Endlichkeitsterms* ein; eine Gleichungsspezifikation mit hinzugefügten Endlichkeitstermen bezeichnen wir als *Endlichkeitsspezifikation*, ihre Modelle als SPECF-Algebren. Ein Regelsystem wird angegeben, das das formale Ableiten weiterer Endlichkeitsterme ermöglicht. Wie schon für Σ-Algebren und SPEC-Algebren wird dann in Abschnitt 4.2 auf die Kategorie der SPECF-Algebren eingegangen. Abschnitt 4.3 zeigt, wie die Konzepte für Erweiterungen von Gleichungsspezifikationen aus Abschnitt 3 auf Endlichkeitsspezifikationen übertragen werden können.

4.1 SPECF-Algebren

Definition 4.1. *Sei $\Sigma = (S, \Omega)$ eine Signatur, Ξ ein Variablensystem zu Σ und A eine Σ-Algebra. Für $s \in S$, $T \in \mathfrak{T}_{s,\Omega}(\Xi)$ bezeichne $B_{\mathrm{var}(T),A}$ die Menge aller Belegungen des minimalen Variablensystems zu T (Definition 1.9) in A. T heißt ein **Endlichkeitsterm** für A, wenn für alle $a \in A_s$ die Menge*

$$\{\alpha \in B_{\mathrm{var}(T),A} \mid \overline{\alpha}(T) = a\}$$

endlich ist.

Definition 4.2. *Eine **Endlichkeitsspezifikation** ist ein Tupel $\mathit{SPECF} = (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$, wobei (S, Ω, Ξ, G) eine Gleichungsspezifikation (Definition 2.3) ist und $\mathcal{T}^{\mathrm{fin}} = (\mathcal{T}_s^{\mathrm{fin}})_{s \in S}$ eine Familie von Mengen $\mathcal{T}_s^{\mathrm{fin}} \subseteq \mathfrak{T}_{\Omega,s}(\Xi)$.*

Definition 4.3. *Sei $\mathit{SPECF} = (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ eine Endlichkeitsspezifikation. A sei ein Modell (Definition 2.5) der Gleichungsspezifikation (S, Ω, Ξ, G). A wird als **Modell von** SPECF (auch: SPECF**-Algebra**) bezeichnet, wenn für alle $s \in S$ jedes $T \in \mathcal{T}_s^{\mathrm{fin}}$ ein Endlichkeitsterm für A ist.*

Offensichtlich gilt folgendes:

Bemerkung 4.4. Sei $\mathit{SPEC} = (S, \Omega, \Xi, G)$ eine Gleichungsspezifikation. Die Endlichkeitsspezifikation

$$\mathit{SPECF}_{\mathit{SPEC}} := (S, \Omega, \Xi, G, (\emptyset)_{s \in S})$$

mit leeren Mengen von Endlichkeitstermen hat die Eigenschaft, daß jedes Modell von SPEC (Definition 2.5) auch ein Modell von $\mathit{SPECF}_{\mathit{SPEC}}$ (Definition 4.3) ist.

Zu einer vorliegenden Endlichkeitsspezifikation SPECF lassen sich gegebenenfalls weitere Terme finden, die Endlichkeitsterme für sämtliche

SPECF-Algebren sind. Zum Finden solcher zusätzlicher Endlichkeitsterme verwenden wir das folgende Regelsystem. Speziell (vgl. Bemerkung 4.4) kann man auch auch ausgehend von einer Gleichungsspezifikation *SPEC* Terme finden, die für jede *SPEC*-Algebra Endlichkeitsterme sind.

Definition 4.5. *Zu $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ wird das Regelsystem $\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}_{SPEC}$, kurz $\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}$, definiert als $\mathcal{R}^{\mathrm{fin}} := (R^{\mathrm{fin}}_i)_{i \in \mathbb{N} \cup \{\mathsf{G}\}}$, wobei die Schlußregeln*

$$R^{\mathrm{fin}}_i \subseteq \big(\mathfrak{T}_\Omega(\Xi)\big)^i \times \mathfrak{T}_\Omega(\Xi) \qquad (i \in \mathbb{N}),$$
$$R^{\mathrm{fin}}_{\mathsf{G}} \subseteq \big(\mathfrak{T}_\Omega(\Xi)\big)^0 \times \mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$$

genau die im folgenden angegebenen Elemente enthalten:

- *Es gilt*

$$\frac{}{t} \quad (R^{\mathrm{fin}}_0)$$

  für alle $s \in S$, $t \in \Omega_{\lambda,s} \cup \Xi_s$.

- *Sei $T \in \mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$ mit $\mathrm{var}(T) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ beliebig) und seien $T_1 \in \mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}(x_1)}(\mathrm{var}(T))$, …, $T_n \in \mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}(x_n)}(\mathrm{var}(T))$ Terme mit:*

  (i) T ist Unterterm (Definition 1.7) jedes T_k ($1 \leq k \leq n$);

  (ii) außerhalb der Vorkommnisse von T kommen in den T_k keine Variablen vor (d. h. ist $x \in \Xi_{\mathrm{sort}(T)}$, so gibt es $\widetilde{T}_k \in \mathfrak{T}_\Omega(\{x\})$ mit $T_k = \overline{\sigma}(\widetilde{T}_k)$ für $\sigma\colon \{x\} \to \mathfrak{T}_\Omega(\mathrm{var}(T))$, $\sigma(x) := T$);

  (iii) gemäß dem Regelsystem für formale Gleichungen aus Definition 2.11 ist $(\mathrm{var}(T), x_1, T_1), \ldots, (\mathrm{var}(T), x_n, T_n) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}}(G)$.

  Dann gilt

$$\frac{}{T} \quad (R^{\mathrm{fin}}_{\mathsf{G}}).$$

- *Für $T \in \mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$ mit $\mathrm{var}(T) = \{x_1, \ldots, x_i\}$ ($i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) gilt*

$$\frac{T,\ \sigma(x_1),\ \ldots,\ \sigma(x_i)}{\overline{\sigma}(T)} \quad (R^{\mathrm{fin}}_i)$$

  für alle Substitutionen $\sigma\colon \mathrm{var}(T) \to \mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$.

Bei der Regel $R^{\mathrm{fin}}_{\mathsf{G}}$ mag es zunächst seltsam erscheinen, daß die Voraussetzungen $(\mathrm{var}(T), x_k, T_k) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}}(G)$ nicht formal als Prämissen gehandhabt werden, z. B. indem das Regelsystem mit Schlußregeln auf dem Coprodukt (d. h. einer »disjunkten Vereinigung«) der Mengen $\mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$ und $\mathcal{G}_{S,\Omega,\Xi}$ anstelle von Schlußregeln nur auf $\mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$ definiert wird. Da jedoch die Folgerungen ausschließlich Terme sind und keine neuen formalen Gleichungen abgeleitet werden können, ist die gewählte Darstellung die natürlichere.

Satz 4.6. *$SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ sei eine beliebige Gleichungsspezifikation. Das Regelsystem $\mathcal{R}^{\mathrm{fin}} = \mathcal{R}^{\mathrm{fin}}_{SPEC}$ für Endlichkeitsterme ist **korrekt**: Ist $SPECF = (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ eine auf SPEC aufbauende Endlichkeitsspezifikation, $T \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}}(\mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ und $A = \big((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega}\big)$ eine beliebige SPECF-Algebra, so ist T ein Endlichkeitsterm für A.*

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N} \cup \mathsf{G}$ beliebig gegeben; wir betrachten die Schlußregel R_i. Bei $i \in \{0, \mathsf{G}\}$ hat R_i keine Prämissen; für diese Fälle zeigen wir, daß jede Folgerung (Definition 2.7) von R_i ein Endlichkeitsterm für A sein muß. Bei $i \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ betrachten wir eine Situation gemäß der Darstellung beim entsprechenden Fall der Definition 4.5 und zeigen, daß unter der Voraussetzung, daß T, $\sigma(x_1)$, …, $\sigma(x_n)$ sämtlich Endlichkeitsterme für A sind, auch $\overline{\sigma}(T)$ ein Endlichkeitsterm sein muß. Sind alle Fälle von i untersucht, so folgt durch Induktion über die Länge von formalen Beweisen (Definition 2.8) für jedes $T \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}}(\mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$, daß es ein Endlichkeitsterm für A ist.

Zunächst betrachten wir den Fall $i = 0$. Die Folgerungen von R_0 sind Terme, die lediglich aus einem Konstantensymbol oder einer Variablen bestehen: $T = \mathrm{term}(t)$, $t \in \Omega_{\lambda,s} \cup \Xi_s$. Bei $t \in \Omega_{\lambda,s}$ ist $\mathrm{var}(T) = \emptyset$, und damit hat $B_{\mathrm{var}(T),A}$, die Menge der Belegungen des minimalen Variablensystem von T in A, nur ein einziges Element. Bei $t \in \Xi_s$ ist $\mathrm{var}(T) = \{t\}$ einelementig, und man kann $B_{\mathrm{var}(T),A}$ mit der Trägermenge A_s identifizieren: Für jedes $a \in A_s$ gibt es dann genau ein Element $\alpha \in B_{\mathrm{var}(T),A}$ mit $\overline{\alpha}(T) = a$. In beiden Fällen ist für jedes $a \in A_s$ die Menge

$$\{\alpha \in B_{\mathrm{var}(T),A} \mid \overline{\alpha}(T) = a\}$$

endlich und T also laut Definition ein Endlichkeitsterm für A.

Im Fall $i = \mathsf{G}$ erfüllt die Folgerung $T \in \mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$ die Bedingung, daß zu $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathrm{var}(T)$ Terme $T_k \in \mathfrak{T}_{\Omega,\mathrm{sort}(x_k)}(\mathrm{var}(T))$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) existieren, die sämtlich T zum Unterterm haben und für die $(\mathrm{var}(T), x_k, T_k) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}}(G)$ gilt – in jeder Belegung $\alpha \in B_{\mathrm{var}(T),A}$ ist also

$$\overline{\alpha}(x_k) = \overline{\alpha}(T_k)$$

laut Satz 2.12 über die Korrektheit von $\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}$ – und die sich als

$$T_k = \overline{\sigma}(\widetilde{T}_k)$$

schreiben lassen mit

$$\begin{aligned} \sigma \colon \{x\} &\to \mathfrak{T}_\Omega(\mathrm{var}(T)) \\ \overline{\sigma}(x) &= T \end{aligned}$$

und $\widetilde{T}_k \in \mathfrak{T}_\Omega(\{x\})$. Wir zeigen für diese Situation, daß es zu einem vorgegebenen $a \in A_{\mathrm{sort}(T)}$ nur ein einziges $\alpha \in B_{\mathrm{var}(T),A}$ geben kann mit $\alpha(T) = a$ (womit T also ein Endlichkeitsterm für A ist); anders gesagt, durch $\overline{\alpha}(T)$ sind die $\alpha(x_k)$ ($k \in \{1, \ldots, n\}$) sämtlich eindeutig bestimmt. Dies aber ist nach den Voraussetzungen klar, denn es ist

$$\alpha(x_k) = \overline{\alpha}(T_k) = (\overline{\alpha} \circ \overline{\sigma})(\widetilde{T}_k),$$

und da $\overline{\alpha} \circ \overline{\sigma}$ als Homomorphismus $\mathfrak{T}_\Sigma(\{x\}) \to A$ angesehen werden kann (Bemerkungen 1.27 und 1.26), ist es gemäß Satz 1.28 die Auswertung einer Belegung $\{x\} \to A$ und somit in der Tat durch $(\overline{\alpha} \circ \overline{\sigma})(x) = \overline{\alpha}(T)$ eindeutig festgelegt.

Schließlich untersuchen wir den Fall $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Sei $a \in A_{\mathrm{sort}(T)} = A_{\mathrm{sort}(\overline{\sigma}(T))}$ vorgegeben. Damit für eine Belegung $\alpha\colon \mathrm{var}(\overline{\sigma}(T)) \to A$ die Gleichung $\overline{\alpha}(\overline{\sigma}(T)) = a$ erfüllt sein kann, muß für die Belegung $\beta\colon \{x_1, \ldots, x_i\} \to A$ mit $\beta(x_k) := (\overline{\alpha} \circ \overline{\sigma})(x_k)$ ($k \in \{1, \ldots, i\}$) die Gleichung $\overline{\beta}(T) = a$ erfüllt sein. Es gibt aber nur endlich viele solche Belegungen β laut der Voraussetzung, daß T ein Endlichkeitsterm für A ist, und zu jeder derartigen Belegung β gibt es für jedes k nur endlich viele Belegungen $\alpha_k\colon \mathrm{var}(\overline{\alpha}(x_k)) \to A$ mit $\overline{\alpha}(\overline{\sigma}(x_k)) = \beta(x_k)$, denn auch $\overline{\sigma}(x_k)$ ist laut Voraussetzung ein Endlichkeitsterm für A; also gibt es wegen

$$\mathrm{var}(\overline{\alpha}(T)) = \bigcup_{k\in\{1,\ldots,i\}} \mathrm{var}(\overline{\alpha}(x_k))$$

auch nur endlich viele α, deren sämtliche Einschränkungen $\alpha_k := \alpha|_{\mathrm{var}(\overline{\alpha}(x_k))}$ derartige Gleichungen erfüllen. Damit kann es zum gegebenen a insgesamt nur endlich viele Belegungen α geben mit $\overline{\alpha}(\overline{\sigma}(T)) = a$. Somit ist $\overline{\sigma}(T)$ tatsächlich ein Endlichkeitsterm für A. □

Eine offene Frage ist, ob für das Regelsystem $\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}$ auch ein Vollständigkeitssatz gilt, d. h. ob jeder Endlichkeitsterm sämtlicher *SPECF*-Algebren darin einen formalen Beweis besitzt. Ebenfalls offen ist die Frage, ob möglicherweise eine Endlichkeitsspezifikation für alle ihre Modelle die Gültigkeit von formalen Gleichungen erzwingen kann, die nicht in allen Modellen der zugrundeliegenden Gleichungsspezifikation gültig sind.

Beispiel 4.7. Wir betrachten $\mathit{SPEC}_{\mathit{SPECF}}$ (gemäß Bemerkung 4.4) für die Gleichungsspezifikation *SPEC* aus Beispiel 2.21. Wir wollen

$$x_1 +_1 1_1 \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}_{\mathit{SPEC}}}((\emptyset)_{s\in S})$$

nachweisen. Das geschieht mit Regel $R^{\mathrm{fin}}_{\mathsf{G}}$: Es ist $\mathrm{var}(x_1 +_1 1_1) = \{x_1\}$, und für den Term $T_1 := ((x_1 +_1 1_1) +_1 (-_1 1_1))$ gilt $(\{x_1\}, x_1, T_1) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}}(G)$, wie man leicht nachweist; außerdem ist $x_1 +_1 1_1$ ein Unterterm von T_1 und in T_1 kommen sonst keine Variablen vor. Somit hat man

$$\frac{}{x_1 +_1 1_1} \quad (R^{\mathrm{fin}}_{\mathsf{G}}).$$

Beispiel 4.8. Wir ergänzen die Gleichungsspezifikation $\mathit{SPEC} = (S, \Omega, \Xi, G)$ aus Beispiel 2.21 zu einer Endlichkeitsspezifikation $\mathit{SPECF} := (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ mit $\mathcal{T}^{\mathrm{fin}} := (\mathcal{T}^{\mathrm{fin}}_s)_{s\in S}$, $\mathcal{T}_{s_1} := \emptyset$, $\mathcal{T}_{s_2} := \{\varphi(x_1)\}$. Modelle von *SPECF* sind definitionsgemäß diejenigen Modelle $A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ von *SPEC*, bei denen der Homomorphismus $f_\varphi\colon A_{s_1} \to A_{s_2}$ zu jedem Element von A_{s_2} nur endlich viele Urbilder besitzt – aus Beispiel 2.21 bleiben diejenigen Modelle übrig, bei denen $n_1 \neq 0$ gilt (so daß also die Menge $A_{s_1} = \mathbb{Z}/_{n_1}\mathbb{Z}$ endlich ist).

Wir wollen mit dem Regelsystem aus Definition 4.5 nachweisen, daß für beliebige Variablen $y \in \Xi_{s_1}$ die Terme $\varphi(y)$ und $\varphi(y +_1 1_1)$ Endlichkeitsterme für jede *SPECF*-Algebra sind. Für $\varphi(y)$ ergibt sich das durch die

Substitution $\sigma\colon \{x_1\} \to \mathfrak{T}_\Omega(\Xi)$ mit $\sigma(x_1) := y$ wie folgt aus $\varphi(x_1) \in \mathcal{T}_{s_1}$:

$$\frac{}{y} \quad (R_0^{\text{fin}})$$

$$\frac{\varphi(x_1),\ y}{\varphi(y)} \quad (R_1^{\text{fin}})$$

(denn $\overline{\sigma}(\varphi(x_1)) = \varphi(y)$). Für $\varphi(y +_1 1_1)$ zeigt man zunächst analog zu Beispiel 4.7

$$\frac{}{y +_1 1_1} \quad (R_{\mathsf{G}}^{\text{fin}})$$

und dann mit $\sigma(x_1) := y +_1 1_1$

$$\frac{\varphi(x_1),\ y +_1 1_1}{\varphi(y +_1 1_1)} \quad (R_1^{\text{fin}}).$$

4.2 Die Kategorie $\mathrm{Alg}(SPECF)$ zu einer Endlichkeitsspezifikation

Definition 4.9. *Sei $SPECF = (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ eine Endlichkeitsspezifikation und $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ die zugrundeliegende Gleichungsspezifikation. $\mathbf{Alg}(SPECF)$ ist die volle Unterkategorie von $\mathbf{Alg}(SPEC)$ (Definition 2.22) mit denjenigen Objekten, die Modelle von $SPECF$ sind.*

In $\mathbf{Alg}(SPECF)$ gibt es zwar finale Algebren (die triviale Σ-Algebra Fin_Σ ist auch eine $SPECF$-Algebra), jedoch – anders als in $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ und $\mathbf{Alg}(SPEC)$ – im allgemeinen keine initialen Algebren, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.10. Sei $SPECF := (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ mit $S := \{s_1, s_2, s_3\}$, $\Omega := (\Omega_{w,s})_{(w,s)\in S^*\times S}$,

$$\begin{aligned} \Omega_{\lambda,s_1} &:= \{0_1, 1_1\}, & \Omega_{\lambda,s_2} &:= \{0_2\}, \\ \Omega_{s_1,s_1} &:= \{-_1\}, & \Omega_{s_2,s_2} &:= \{-_2\}, \\ \Omega_{s_1 s_1,s_1} &:= \{+_1\}, & \Omega_{s_2 s_2,s_2} &:= \{+_2\}, \\ \Omega_{s_1,s_2} &:= \{\varphi_1\}, & \Omega_{s_2,s_3} &:= \{\varphi_2\}, \end{aligned}$$

$\Omega_{w,s} := \emptyset$ für alle anderen (w, s), $\Xi := (\Xi_s)_{s\in S}$, $\Xi_1 := \{x_1, y_1, z_1\}$, $\Xi_2 := \{x_2, y_2, z_2\}$, $\Xi_3 := \{x_3, y_3\}$,

$$\begin{aligned} G := \Big\{ &\{x_1\}\colon & x_1 +_1 0_1 &= x_1, \\ &\{x_2\}\colon & x_2 +_2 0_2 &= x_2, \\ &\{x_1\}\colon & x_1 +_1 (-x_1) &= 0_1, \\ &\{x_2\}\colon & x_2 +_2 (-x_2) &= 0_2, \\ &\{x_1, y_1\}\colon & x_1 +_1 y_1 &= y_1 +_1 x_1, \\ &\{x_2, y_2\}\colon & x_2 +_2 y_2 &= y_2 +_2 x_2, \\ &\{x_1, y_1, z_1\}\colon & (x_1 +_1 y_1) +_1 z_1 &= x_1 +_1 (y_1 +_1 z_1), \\ &\{x_2, y_2, z_2\}\colon & (x_2 +_2 y_2) +_2 z_2 &= x_2 +_2 (y_2 +_2 z_2), \\ &\{x_1, y_1\}\colon & \varphi_1(x_1 +_1 y_1) &= \varphi_1(x_1) +_2 \varphi_1(y_1), \\ &\{x_3, y_3\}\colon & x_3 &= y_3 \Big\}, \end{aligned}$$

$\mathcal{T}^{\mathrm{fin}} := (\mathcal{T}^{\mathrm{fin}}_s)_{s\in S}$, $\mathcal{T}^{\mathrm{fin}}_{s_1} := \emptyset$, $\mathcal{T}^{\mathrm{fin}}_{s_2} := \emptyset$, $\mathcal{T}^{\mathrm{fin}}_{s_3} := \{\varphi_2(x_2)\}$.

Modelle der zugrundeliegenden Gleichungsspezifikation $SPEC := (S, \Omega, \Xi, G)$ sind Algebren $A = \big((A_s)_{s\in S}, (\Omega_{w,s})_{(w,s)\in S^*\times S}\big)$ mit kommutativen Gruppen A_1 und A_2 (wobei f_{+_i} die Addition, f_{0_i} das neutrale Element, f_{-_i} die Invertierungsabbildung von A_i ist) und einer einelementigen Menge A_3; dabei ist f_{1_1} ein beliebiges Element von A_1, f_{φ_1} ein Gruppenhomomorphismus von A_1 in A_2 und f_{φ_2} die konstante Abbildung von A_2 auf das einzige Element von A_3.

In Modellen von $SPECF$ muß außerdem $\varphi_2(x_2)$ ein Endlichkeitsterm sein, d. h. A_2 darf nur endlich viele Elemente haben. Beispiele für $SPECF$-

Algebren erhält man mit den Gruppen

$$A_1 := \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad A_2 := {}^{\mathbb{Z}}/_{n\,\mathbb{Z}},$$

$n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, und der natürlichen Projektion

$$f_{\varphi_1} : \mathbb{Z} \to {}^{\mathbb{Z}}/_{n\,\mathbb{Z}}.$$

Gäbe es eine initiale $SPECF$-Algebra, so müßte die Trägermenge von s_1 darin unendlich sein, denn die Grundterme $T_1 := 1_1$, $T_2 := 1_1 +_1 1_1$, $T_3 := (1_1 +_1 1_1) +_1 1_1$, $T_4 := ((1_1 +_1 1_1) +_1 1_1) +_1 1_1, \ldots$ beschreiben in den oben genannten Beispielen für $SPECF$-Algebren paarweise verschiedene Elemente. Die Trägermenge von s_2 dagegen ist in jeder $SPECF$-Algebra endlich; also müßte es ein $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ geben, für das in der initialen Algebra $\mathrm{eval}_{s_2}(\varphi_1(T_k)) = \mathrm{eval}_{s_2}(0_2)$ wäre. Das aber ist nicht damit vereinbar, daß $\mathrm{eval}_{s_2}(\varphi_1(T_k)) \neq \mathrm{eval}_{s_2}(0_2)$ gilt in der oben angegebenen Beispielalgebra mit $A_2 = {}^{\mathbb{Z}}/_{n\,\mathbb{Z}}$, $n = k+1$: Im Widerspruch zur Definition der Initialität könnte es keinen Homomorphismus von der initialen in die Beispielalgebra geben. Somit existiert zur gegebenen Endlichkeitsspezifikation $SPECF$ keine initiale $SPECF$-Algebra.

4.3 Erweiterungen von Endlichkeitsspezifikationen

Das in Abschnitt 3 über Erweiterungen von Gleichungsspezifikationen Gesagte läßt sich im wesentlichen unverändert auf Endlichkeitsspezifikationen übertragen:

Definition 4.11. *$SPECF_0 = (S_0, \Omega_0, \Xi_0, G_0, \mathcal{T}_0^{\text{fin}})$ und $SPECF_1 = (S_1, \Omega_1, \Xi_1, G_1, \mathcal{T}_1^{\text{fin}})$ seien Endlichkeitsspezifikationen; dabei sei $SPEC_0 := (S_0, \Omega_0, \Xi_0, G_0)$ eine Subspezifikation von $SPEC_1 := (S_1, \Omega_1, \Xi_1, G_1)$ (Definition 3.3) und $\mathcal{T}_0^{\text{fin}} \subseteq \mathcal{T}_1^{\text{fin}}$. Dann heißt $SPECF_0$* ***Subspezifikation*** *von $SPECF_1$ und umgekehrt $SPECF_1$* ***Erweiterung*** *von $SPECF_0$.*

Definition 4.12. *In der Situation von Definition 4.11 sei A_1 eine $SPECF_1$-Algebra. $(A_1)_{SPEC_0}$ (Definition 3.4) ist dann notwendig eine $SPECF_0$-Algebra; man schreibt für $(A_1)_{SPEC_0}$ auch $(A_1)_{SPECF_0}$ und spricht von der Einschränkung von A_1 auf $SPECF_0$.*

Definition 4.13. *In der Situation von Definition 4.11 ist $SPECF_1$ eine* ***vorsichtige Erweiterung*** *von $SPECF_0$, wenn $SPEC_1$ eine vorsichtige Erweiterung von $SPEC_0$ (Definition 3.6) ist und jeder Endlichkeitsterm aus $\mathcal{T}_1^{\text{fin}} \setminus \mathcal{T}_0^{\text{fin}}$ mindestens eine Variable einer Sorte aus $S_1 \setminus S_0$ enthält.*

Diese Definition für vorsichtige Erweiterungen von Endlichkeitsspezifikationen stellt sicher, daß die Konstruktion von Seite 36 weiterhin anwendbar ist: Zu jeder $SPECF_0$-Algebra A_0 läßt sich somit eine $SPECF_1$-Algebra A_1 finden mit $(A_1)_{SPECF_0} = A_0$.

5 Multimengen und gewichtete Mengen

Die Definition der gefärbten Petrinetze beruht wesentlich auf dem Konzept der *Multimenge*. Eine Multimenge M über einer Menge A kann man sich vorstellen als eine Sammlung von Elementen $a \in A$, die anders als bei »gewöhnlichen« Mengen auch eine Vielfachheit $M(a) \in \mathbb{N}$ haben. Allgemeiner ist der Begriff der *gewichteten Menge*, bei der die Gewichtungen auch negativ sein dürfen. Da wir Petrinetze mit unendlichen Markierungen und unendlich nebenläufigen Schaltvorgängen zulassen wollen, benötigen wir über die bei Multimengen und gewichteten Mengen üblichen Begriffe hinaus eine Reihe von neuen Definitionen: Wir behandeln die *Addierbarkeit* einer Familie von gewichteten Mengen, die *Auswertungsverträglichkeit* einer gewichteten Menge mit einer Abbildung oder mit einer gewichteten Menge von Abbildungen sowie die *Verträglichkeit* zweier gewichteter Mengen miteinander bezüglich einer zweistelligen Abbildung.

Definition 5.1. *Für eine Menge A ist*

$$\mathcal{M}^{\pm}(A) := \mathrm{Abb}(A, \mathbb{Z})$$

*die Menge aller **gewichteten Mengen** über A und*

$$\mathcal{M}(A) := \mathrm{Abb}(A, \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{M}^{\pm}(A)$$

*die Menge aller **nichtnegativ gewichteten Mengen** oder **Multimengen** über A. Für $M \subseteq \mathcal{M}^{\pm}(A)$, $a \in A$ wird die Zahl $M(a)$ als **Gewichtung** von a in M bezeichnet.*

Definition 5.2. *Zu $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ definiert man den **Träger*** (support) *von M als* $\mathrm{supp}(M) := \{a \in A \mid M(a) \neq 0\} \subseteq A$.

Definition 5.3. *Eine gewichtete Menge $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ heißt **leer**, wenn* $\mathrm{supp}(M) = \emptyset$ *ist.*

Definition 5.4. *Eine gewichtete Menge $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ heißt **endlich**, wenn $\mathrm{supp}(M)$ eine endliche Menge ist; andernfalls heißt M **unendlich**. $\mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(A)$ ist die Menge aller endlichen gewichteten Mengen über A, $\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(A) = \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(A) \cap \mathcal{M}(A)$ die Menge aller endlichen Multimengen über A.*

Definition 5.5. *Sei $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$. $a \in A$ ist ein **Element** von M, wenn $M(a) \neq 0$ ist. Ist $M(a) = n$, so heißt a ein n-**faches Element** von M. Für endliches M heißt*

$$\#(M) := \sum_{a \in A} M(a)$$

*die **Elementanzahl** von M.*

Bemerkung 5.6. Eine endliche gewichtete Menge $M \in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(A)$ mit $\#(M) = 0$ ist nicht notwendig leer im Sinne von Definition 5.3. Ist jedoch $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(A)$ eine endliche *Multi*menge, so hat die Summe in Definition 5.5 keine negativen Summanden, und es gilt $\#(M) = 0$ genau dann, wenn M leer ist.

Wie allgemein für Abbildungen nach $\mathbb{Z}$, sind für $M, N \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$, $z \in \mathbb{Z}$ gewichtete Mengen $M + N$, $M - N$ und $z \cdot M$ definiert durch

$$(M + N)(a) := M(a) + N(a),$$
$$(M - N)(a) := M(a) - N(a)$$

und

$$(z \cdot M)(a) := z \cdot M(a)$$

für $a \in A$. Mit diesen Definitionen ist $\mathcal{M}^{\pm}(A)$ ein $\mathbb{Z}$-Modul (und damit eine abelsche Gruppe bezüglich $+$). $\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)$ ist ein Untermodul (und eine Untergruppe) von $\mathcal{M}^{\pm}(A)$, denn für $M, N \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)$ und $z \in \mathbb{Z}$ ist $M + N \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)$ und $z \cdot M \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)$.

Ferner hat man auf $\mathcal{M}^{\pm}(A)$ die Ordnungsrelation $\leq$ mit

$$M \leq N \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, a \in A\colon M(a) \leq N(a).$$

Analog ist auf $\mathcal{M}^{\pm}(A)$ die Ordnungsrelation $\geq$ definiert.

$\emptyset_A$ bezeichnet die **leere Multimenge** über A:

$$\emptyset_A(a) := 0$$

für alle $a \in A$. Ist $x \in A$, so schreiben wir $\{\!\{x\}\!\}$ für die einelementige Multimenge über A, die durch

$$\{\!\{x\}\!\}(x) := 1,$$
$$\{\!\{x\}\!\}(a) := 0 \quad \text{für } a \in A\backslash\{x\}$$

definiert ist. Für $x_1, \ldots, x_k \in A$ (mit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) wird die Multimenge $\{\!\{x_1, \ldots, x_k\}\!\}$ definiert durch

$$\{\!\{x_1, \ldots, x_k\}\!\} := \{\!\{x_1\}\!\} + \cdots + \{\!\{x_k\}\!\}.$$

Für $\widetilde{A} \subseteq A$ ist $\chi_{\widetilde{A}}$ die durch

$$\chi_{\widetilde{A}}(\widetilde{a}) := 1 \quad \text{für } \widetilde{a} \in \widetilde{A},$$
$$\chi_{\widetilde{A}}(a) := 0 \quad \text{für } a \in A\backslash\widetilde{A}$$

definierte Multimenge über A. ($\{\!\{x\}\!\}$ ist also das gleiche wie $\chi_{\{x\}}$.)

Definition 5.7. *Sei A eine Menge und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von gewichteten Mengen $M_i \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$. Die Familie $(M_i)_{i\in I}$ heißt **addierbar**, wenn für jedes $a \in A$ nur endlich viele $i \in I$ mit $M_i(a) \neq 0$ existieren. Dann ist die **Summe** der Familie $(M_i)_{i\in I}$ definiert als die gewichtete Menge $\sum_{i\in I} M_i \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ mit*

$$\Big(\sum_{i\in I} M_i\Big)(a) := \sum_{i\in I} M_i(a)$$

für $a \in A$.

Bemerkung 5.8. Sind $(M_i)_{i\in I}$ und $(N_i)_{i\in I}$ addierbare Familien von gewichteten Mengen $M_i, N_i \in \mathcal{M}^\pm(A)$, so ist auch die Familie $(M_i + N_i)_{i\in I}$ addierbar, und es gilt

$$\sum_{i\in I}(M_i + N_i) = \sum_{i\in I} M_i + \sum_{i\in I} N_i.$$

Beweis. Wie man leicht sieht, sind für jedes $a \in A$ die gemäß Definition 5.7 zu überprüfenden Bedingungen erfüllt. □

Definition 5.9. *Seien A, B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Eine gewichtete Menge $M \in \mathcal{M}^\pm(A)$ heißt **auswertungsverträglich** mit f, wenn für jedes $b \in B$ die Menge*

$$\{a \in \operatorname{supp}(M) \mid f(a) = b\}$$

endlich ist. $\mathcal{M}^\pm_f(A)$ bezeichne die Menge aller gewichteten Mengen über A, die mit f auswertungsverträglich sind. Für $M \in \mathcal{M}^\pm_f(A)$ definiert man die gewichtete Menge $f(M) \in \mathcal{M}^\pm(B)$ durch

$$(f(M))(b) := \sum_{\substack{a\in A\\ f(a)=b}} M(a).$$

f bezeichnet damit außer der ursprünglichen Abbildung $A \to B$ auch eine Abbildung $\mathcal{M}^\pm_f(A) \to \mathcal{M}^\pm(B)$.

Bemerkung 5.10. Es ist offensichtlich $\mathcal{M}^\pm_{\text{fin}}(A) \subseteq \mathcal{M}^\pm_f(A)$ für beliebige Abbildungen $f\colon A \to B$, und für $M \in \mathcal{M}^\pm_{\text{fin}}(A)$ ist $f(M) \in \mathcal{M}^\pm_{\text{fin}}(B)$.

Definition 5.11. *Seien A, B Mengen und $F \in \mathcal{M}^\pm(\operatorname{Abb}(A, B))$. Eine gewichtete Menge $M \in \mathcal{M}^\pm(A)$ heißt **auswertungsverträglich** mit F, wenn für jedes $b \in B$ die Menge*

$$\{(f, a) \in \operatorname{supp}(F) \times \operatorname{supp}(M) \mid f(a) = b\}$$

endlich ist. $\mathcal{M}^\pm_F(A)$ bezeichne die Menge aller gewichteten Mengen über A, die mit F auswertungsverträglich sind. Für $M \in \mathcal{M}^\pm_F(A)$ definiert man die gewichtete Menge $F(M) \in \mathcal{M}^\pm(B)$ durch

$$F(M) := \sum_{\substack{(f,a)\in\operatorname{supp}(F)\times\operatorname{supp}(A)\\ f(a)=b}} F(f) \cdot M(a).$$

Mit dieser Definition induziert die gewichtete Menge F eine ebenfalls mit F bezeichnete Abbildung $\mathcal{M}^\pm_F(A) \to \mathcal{M}^\pm(B)$.

Bemerkung 5.12. Ist eine *Multimenge* $M \in \mathcal{M}(A)$ auswertungsverträglich mit einer *Multimenge* $F \in \mathcal{M}(\operatorname{Abb}(A, B))$, so ist auch $F(M)$ eine Multimenge (die Vielfachheiten der Elemente von $F(M)$ können nicht negativ werden).

Durch $F := \{\!\!\{f\}\!\!\}$ findet man Definition 5.9 in Definition 5.11 als Spezialfall wieder; denn es ist $\mathcal{M}^{\pm}_{f}(A) = \mathcal{M}^{\pm}_{\{\!\!\{f\}\!\!\}}(A)$, und für $M \in \mathcal{M}^{\pm}_{f}(A)$ ist $f(M) = \{\!\!\{f\}\!\!\}(M)$.

Bemerkung 5.13. Sei $F \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\operatorname{Abb}(A, B))$ eine *endliche* gewichtete Menge und $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ eine gewichtete Menge. Ist für jedes $f \in \operatorname{supp}(F)$ die gewichtete Menge M auswertungsverträglich mit f im Sinne der Definition 5.9, so ist M auswertungsverträglich mit F.

Beweis. Die Menge

$$\begin{aligned}&\{(f, a) \in \operatorname{supp}(F) \times \operatorname{supp}(M) \mid f(a) = b\}\\ &\quad = \bigcup_{f \in \operatorname{supp}(F)} \Big(\{f\} \times \{a \in \operatorname{supp}(M) \mid f(a) = b\}\Big)\end{aligned}$$

ist als Vereinigung endlich vieler endlicher Mengen selbst endlich. □

Definition 5.14. *A_1, A_2 und B seien Mengen, $\varphi\colon A_1 \times A_2 \to B$ eine Abbildung. Gewichtete Mengen $M_1 \in \mathcal{M}^{\pm}(A_1)$, $M_2 \in \mathcal{M}^{\pm}(A_2)$ heißen miteinander* ***verträglich*** *bezüglich φ, wenn für jedes $b \in B$ die Menge*

$$\{(a_1, a_2) \in \operatorname{supp}(M_1) \times \operatorname{supp}(M_2) \mid \varphi(a_1, a_2) = b\}$$

endlich ist; dann schreibt man $\varphi(A_1, A_2)$ für die gewichtete Menge $\in \mathcal{M}^{\pm}(B)$, die durch

$$\big(\varphi(M_1, M_2)\big)(b) := \sum_{\substack{(a_1,a_2) \in A_1 \times A_2\\ \varphi(a_1,a_2)=b}} M_1(a_1) \cdot M_2(a_2)$$

definiert ist.

Damit ist für $b \in B$

$$\big(\varphi(M_1, M_2)\big)(b) = \sum_{\substack{(a_1,a_2) \in \operatorname{supp}(A_1) \times \operatorname{supp}(A_2)\\ \varphi(a_1,a_2)=b}} M_1(a_1) \cdot M_2(a_2),$$

wobei in diese Darstellung gerade diejenigen Summanden aus der Definition aufgenommen wurden, die von 0 verschieden sind. Hieran sieht man, daß die Verträglichkeit gemäß Definition 5.14 nötig ist, um das Definieren von $\varphi(M_1, M_2)$ wie gewünscht möglich zu machen: Anschaulich gesprochen werden in $\varphi(M_1, M_2)$ alle Elemente $\varphi(a_1, a_2)$ versammelt, die durch Anwendung von φ auf Paare aus Elementen a_1 von M_1 und a_2 von M_2 entstehen, wobei jedes solche Bildelement entsprechend den Vielfachheiten in M_1 und in M_2 berücksichtigt wird.

Bemerkung 5.15. Ist eine *Multimenge* $M_1 \in \mathcal{M}(A_1)$ verträglich mit einer *Multimenge* $M_2 \in \mathcal{M}(A_2)$ bezüglich einer Abbildung $\varphi\colon A_1 \times A_2 \to B$, so ist auch $\varphi(M_1, M_2)$ eine Multimenge (die Vielfachheiten der Elemente von $\varphi(M_1, M_2)$ können nicht negativ werden).

Bemerkung 5.16. Die Situation von Definition 5.11 kann als Sonderfall derjenigen in Definition 5.14 angesehen werden. Mit $A_1 := \mathrm{Abb}(A, B)$, $A_2 := A$ und $\varphi(f, a) := f(a)$ für $f \in \mathrm{Abb}(A, B)$, $a \in A$ ergibt sich in Definition 5.14 das gleiche wie in Definition 5.11, nämlich:

- $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ ist auswertungsverträglich mit $F \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathrm{Abb}(A, B))$ genau dann, wenn F und M miteinander verträglich bezüglich φ sind;
- ist das der Fall, so gilt $F(M) = \varphi(F, M)$.

Notiert man eine Abbildung $A_1 \times A_2 \to B$ in Infixschreibweise, so kann man noch folgende Notation einführen:

Definition 5.17. *A_1, A_2 und B seien Mengen und*

$$\begin{aligned} \bullet\colon A_1 \times A_2 &\to B, \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 \bullet a_2 \end{aligned}$$

eine Abbildung. Ist $M_1 \in \mathcal{M}^{\pm}(A_1)$ gegeben, so bezeichne

$$\mathcal{M}^{\pm}_{M_1 \bullet}(A_2)$$

die Menge aller derjeniger gewichteter Mengen $M_2 \in \mathcal{M}^{\pm}(A_2)$, für die M_1 und M_2 miteinander verträglich bezüglich $\bullet$ sind. Analog bezeichne für gegebenes $M_2 \in \mathcal{M}^{\pm}(A_2)$

$$\mathcal{M}^{\pm}_{\bullet M_2}(A_1)$$

die Menge der gewichteten Mengen $M_1 \in \mathcal{M}^{\pm}(A_1)$, für die M_1 und M_2 miteinander verträglich bezüglich $\bullet$ sind.

In Ergänzung zu Bemerkung 5.16 besteht auch hier ein enger Zusammenhang mit Definition 5.11: Definiert man $\bullet\colon \mathrm{Abb}(A, B) \times A \to B$ durch $f \bullet a := f(a)$, so ist $\mathcal{M}^{\pm}_{F}(A) = \mathcal{M}^{\pm}_{F\bullet}(A)$.

Bemerkung 5.18. Sei $\bullet\colon A \times B \to C$ eine Abbildung. Die auf der Menge

$$\begin{aligned} &\{(M, N) \in \mathcal{M}^{\pm}(A) \times \mathcal{M}^{\pm}(B) \mid M \in \mathcal{M}^{\pm}_{\bullet N}(A)\} \\ = &\{(M, N) \in \mathcal{M}^{\pm}(A) \times \mathcal{M}^{\pm}(B) \mid N \in \mathcal{M}^{\pm}_{M\bullet}(B)\} \end{aligned}$$

definierte Abbildung $(M, N) \mapsto M \bullet N$ ist in beiden Parametern $\mathbb{Z}$-linear: Das heißt, bei festem $N \in \mathcal{M}^{\pm}(B)$ ist $\mathcal{M}^{\pm}_{\bullet N}(A)$ ein $\mathbb{Z}$-Modul und $M \mapsto M \bullet N$ ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus (es gilt nämlich

$$(M_1 + M_2) \bullet N = M_1 \bullet N + M_2 \bullet N$$

sowie

$$(z \cdot M) \bullet N = z \cdot (M \bullet N)$$

für $M_1, M_2, M \in \mathcal{M}^{\pm}_{\bullet N}(A)$ und $z \in \mathbb{Z}$), und analog ist bei festem $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ $\mathcal{M}^{\pm}_{M\bullet}(B)$ ein $\mathbb{Z}$-Modul und $N \mapsto M \bullet N$ ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus (denn

$$M \bullet (N_1 + N_2) = M \bullet N_1 + M \bullet N_2$$

und

$$M \bullet (z \cdot N) = z \cdot (M \bullet N)$$

für $N_1, N_2, N \in \mathcal{M}^{\pm}_{M\bullet}(B)$ und $z \in \mathbb{Z}$).

Damit gilt für Familien $(M_i)_{i\in I}$, $(N_j)_{j\in J}$ mit *endlichen* Indexmengen I und J

$$\Big(\sum_{i\in I} M_i\Big) \bullet N = \sum_{i\in I} M_i \bullet N, \qquad M \bullet \Big(\sum_{j\in J} N_j\Big) = \sum_{j\in J} M \bullet N_j$$

und

$$\Big(\sum_{i\in I} M_i\Big) \bullet \Big(\sum_{j\in J} N_j\Big) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} M_i \bullet N_j;$$

das beweist man durch Induktion über die Anzahl der Elemente von I bzw. J.

Bemerkung 5.19. Seien A_1, A_2 und B Mengen, $\bullet\colon A_1 \times A_2 \to B$ eine Abbildung und $M_1 \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_1)$, $M_2 \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_2)$ *endliche* gewichtete Mengen. Dann sind M_1 und M_2 miteinander verträglich bezüglich $\bullet$, es gilt $M_1 \bullet M_2 \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B)$, und es ist $\#(M_1 \bullet M_2) = \#(M_1) \cdot \#(M_2)$.

Nach Bemerkung 5.16 ist folgendes ein Spezialfall von Bemerkung 5.18:

Bemerkung 5.20. Die auf der Menge

$$\Big\{(F, M) \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathrm{Abb}(A, B)) \times \mathcal{M}^{\pm}(A) \mid M \in \mathcal{M}^{\pm}_F(A)\Big\}$$

definierte Abbildung $(F, M) \mapsto F(M)$ ist in beiden Parametern $\mathbb{Z}$-linear.

Analog zu Bemerkung 5.19 gilt:

Bemerkung 5.21. Sind $M \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$ und $F \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathrm{Abb}(A, B))$ *beide* endlich, so ist M auswertungsverträglich mit F. Dann ist auch $F(M)$ endlich, und es ist $\#(F(M)) = \#(F) \cdot \#(M)$.

Für Auswertungsverträglichkeit (und also auch allgemeiner für die Verträglichkeit wie in Bemerkung 5.19) reicht es dagegen im allgemeinen nicht aus, wenn nur eine dieser gewichteten Mengen endlich ist:

Beispiel 5.22. fin_A sei die konstante Abbildung, die alle Elemente der Menge A auf das einzige Element der Menge $\{1\}$ abbildet:

$$\mathrm{fin}_A := (a \mapsto \bullet)\colon A \to \{\bullet\}$$

Mit der endlichen gewichteten Menge $\{\!\{\mathrm{fin}_A\}\!\}$ auswertungsverträglich sind nach Definition 5.11 offensichtlich genau diejenigen gewichteten Mengen über A, die selbst endlich sind – es gilt also (mit den Schreibweisen aus Definitionen 5.4, 5.9 und 5.11)

$$\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A) = \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}_A}(A) = \mathcal{M}^{\pm}_{\{\!\{\mathrm{fin}_A\}\!\}}(A).$$

Speziell mit $F := \{\!\{f\}\!\}$ ergibt sich aus Bemerkung 5.20 folgendes:

Bemerkung 5.23. Die auf der Menge $\mathcal{M}^{\pm}_f(A)$ definierte Abbildung $M \mapsto f(M)$ ist $\mathbb{Z}$-linear.

6 Gefärbte Netze

Als ein *gefärbtes Netz* bezeichnen wir eine Strukturbeschreibung, die Mengen von *Stellen* und *Transitionen,* zu jeder Stelle eine *Farbmenge,* zu jeder Transition eine Menge von *Schaltmodi* sowie zu jedem geordneten Paar aus einer Stelle und einer Transition oder umgekehrt eine Multimenge von *Kanten* vorgibt (Abschnitt 6.1). In einer solchen Beschreibung nicht enthalten sind dagegen *Anfangsmarkierungen* sowie die *Schaltregeln*, die vorgeben, welche der bei einem gefärbten Netz denkbaren Schritte konkret erlaubt werden sollen. Diese beiden Konzepte werden bei der Definition des Verhaltens eines gefärbten Netzes eingeführt (Abschnitt 6.2). Wir verzichten entgegen den üblichen Definitionen so weit wie möglich auf Endlichkeitsforderungen: Nicht nur die Farbmengen und die Mengen der Schaltmodi dürfen unendlich sein, sondern auch die Mengen der Stellen und Transitionen sowie die Kanten-Multimengen; wir lassen unendliche Markierungen zu und Schaltvorgänge mit unendlicher Nebenläufigkeit (es dürfen also nicht nur endlich viele Transitionen in endlich vielen Schaltmodi zur Zeit schalten). Dabei spielen die im vorangegangenen Abschnitt 5 behandelten Verträglichkeitsbegriffe für den Umgang mit gewichteten Mengen eine wichtige Rolle.

6.1 Struktur

Definition 6.1. *Ein **gefärbtes Netz** ist ein Tupel*

$$CN = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (C_p)_{p\in\boldsymbol{P}}, (D_t)_{t\in\boldsymbol{T}}, (F_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}),$$

wobei folgendes gilt:

(i) ***P** und **T** sind disjunkte Mengen. Die Elemente von **P** heißen **Stellen*** (places) *von CN, die Elemente von **T** heißen **Transitionen** von CN.*

*(ii) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ ist C_p eine Menge, die **Farbmenge** der Stelle p. Die Elemente von C_p heißen **Farben*** (colours).

*(iii) Für jedes $t \in \boldsymbol{T}$ ist D_t eine Menge, die Menge der **Schaltmodi** der Transition t.*

*(iv) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ und jedes $t \in \boldsymbol{T}$ gilt $F_{p,t}, F_{t,p} \in \mathcal{M}(\mathrm{Abb}(D_t, C_p))$. Die Elemente der Multimengen $F_{p,t}$ und $F_{t,p}$ heißen **Kanten*** (arcs) *von p nach t bzw. von t nach p.*

Der Buchstabe »F« bei $F_{p,t}$ und $F_{t,p}$ steht dafür, daß diese Multimengen einen gewissen Fluß *(flow)* symbolisieren.

In anderen Definitionen wird die Bezeichnung »Kante« für Elemente von $(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}) \cup (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P})$ verwendet, zu denen dann eine *Kantenbeschriftung* (entsprechend unseren $F_{p,t}$ und $F_{t,p}$) Näheres aussagt. – Eine Verallgemeinerung der hier gegebenen Definition ergäbe sich, wenn $F_{p,t}$ und $F_{t,p}$ statt aus $\mathcal{M}(\mathrm{Abb}(D_t, C_p))$ aus der Menge $\mathrm{Abb}(D_t, \mathcal{M}(C_p))$ gewählt werden dürften (»flexible Kanten«, [18]).

In graphischen Darstellungen werden Stellen als Kreise (allgemeiner: Ellipsen) und Transitionen als Quadrate (Rechtecke) wiedergegeben. Pfeile können für *»Mehrfachkanten«* stehen (d. h. für eine Multimenge $F_{p,t}$ oder $F_{t,p}$, die dann als Pfeilbeschriftung angegeben wird) oder auch für einzelne Kanten (z. B. kann, wenn $F_{p,t}$ oder $F_{t,p}$ die Form $\{\!\!\{x\}\!\!\}$ hat, ein mit x beschrifteter Pfeil verwendet werden).

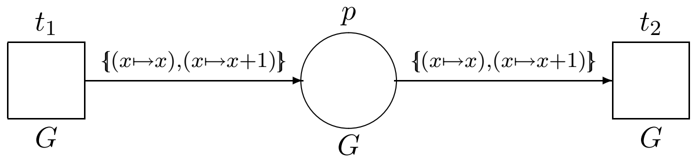
Beispiel 6.2. Sei $G = {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$ mit einem $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ($G = \mathbb{Z}$ im Fall $n = 0$). Das durch

$$CN := CN_G := \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (C_p)_{p\in\boldsymbol{P}}, (D_t)_{t\in\boldsymbol{T}}, (F_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

mit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &:= \{p\}, \quad \boldsymbol{T} := \{t_1, t_2\},\\
C_p := D_{t_1} := D_{t_2} &:= G,\\
F_{p,t_1} &:= \emptyset_{\mathrm{Abb}(G,G)},\\
F_{t_1,p} &:= \big\{\!\!\big\{(x \mapsto x), (x \mapsto x+1)\big\}\!\!\big\} \quad \in \mathcal{M}\big(\mathrm{Abb}(G,G)\big),\\
F_{p,t_2} &:= \big\{\!\!\big\{(x \mapsto x), (x \mapsto x+1)\big\}\!\!\big\} \quad \in \mathcal{M}\big(\mathrm{Abb}(G,G)\big),\\
F_{t_2,p} &:= \emptyset_{\mathrm{Abb}(G,G)}
\end{aligned}$$

definierte gefärbte Netz kann wie folgt dargestellt werden:



6.2 Verhalten

Definition 6.3. *Eine **Markierung** eines gefärbten Netzes $CN = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (C_p)_{\boldsymbol{P}}, (D_t)_{\boldsymbol{T}}, (F_{x,y})_{(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})})$ ist eine Familie $m = (m_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$ von Multimengen $m_p \in \mathcal{M}(C_p)$. Die Menge aller Markierungen von CN wird mit M_{CN} bezeichnet.*

Die Elemente der Multimengen m_p bezeichnet man als **Marken** und sagt, daß diese Marken **auf der Stelle** p liegen.

Zur Beschreibung des möglichen Verhaltens eines gefärbten Netzes CN dienen uns **Transitionsysteme** $(M_{CN}, E, \mathit{Trans}_E)$ (d. h. Tupel bestehend aus der **Zustandsmenge** M_{CN}, einer **Ereignismenge** E und einer **Zustandsübergangsrelation** $\mathit{Trans}_E \subseteq M_{CN} \times E \times M_{CN}$ [28]) mit der Eigenschaft, daß aus $(m, e, m') \in \mathit{Trans}_E \wedge (m, e, m'') \in \mathit{Trans}_E$ folgt, daß $m' = m''$ ist: Falls eine vom Ereignis e bewirkte **Nachfolgemarkierung** m' von m existiert, so ist diese eindeutig bestimmt.

(Es ist zu beachten, daß der Begriff »Transition« in zwei verschiedenen Bedeutungen auftritt. Als Wortbestandteil von »Transitionssystem« steht er für den Übergang zwischen zwei Zuständen; eine Transition im Sinne der Definition 6.1 dagegen ist ein Element $t \in \boldsymbol{T}$.)

Die Definition der Zustandsübergangsrelation Trans_E erhalten wir ausgehend von der Menge $\boldsymbol{T}$ der Transitionen, der Familie $(D_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$ der Schaltmodi und der Familie $(F_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}$ der Kantenmultimengen. Die Grundidee ist, daß eine Transition $t \in \boldsymbol{T}$ in einem Schaltmodus $d \in D_t$ aus jeder Stelle $p \in \boldsymbol{P}$ nach Maßgabe von $(F_{p,t})(\{\!\!\{d\}\!\!\})$ gewisse Elemente der Multimenge m_p verbraucht und anschließend in jede Stelle nach Maßgabe von $(F_{t,p})(\{\!\!\{d\}\!\!\})$ neue Elemente hinzufügt (wobei die Auswertungsverträglichkeit von $\{\!\!\{d\}\!\!\}$ mit den $F_{p,t}$ und $F_{t,p}$ gefordert werden muß, damit die Multimengen $(F_{p,t})(\{\!\!\{d\}\!\!\}), (F_{t,p})(\{\!\!\{d\}\!\!\}) \in \mathcal{M}(C_p)$ definiert sind): t »**schaltet**« im Modus d. Unsere Definition der Zustandsübergangsrelation Trans_E wird darüberhinaus möglich machen, mehrere (nicht notwendig endlich viele) Schaltvorgänge gleichzeitig zuzulassen.

Für die Ereignismenge E werden wir keine genau Festlegung treffen, sondern eine Menge E_{CN} angeben, für die dann $E \subseteq E_{CN}$ beliebig gewählt werden kann (bestimmte Sonderfälle für diese Wahl von E werden später in diesem Abschnitt vorgestellt). Solche Teilmengen E nennen wir **Schaltregeln**, denn sie geben an, welche Schritte erlaubt sind und welche nicht. (In der Literatur ist eine andere Bedeutung des Wortes »Schaltregel« im Gebrauch, die sich auf das Betrachten von *Folgen* von Ereignissen bezieht; z. B. »faire Schaltregel«, siehe [16].)

Definition 6.4. *Ein **Prä-Schritt** eines gefärbten Netzes $CN = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (C_p)_{\boldsymbol{P}}, (D_t)_{\boldsymbol{T}}, (F_{x,y})_{(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})})$ ist eine Familie $e = (e_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$ von Multimengen $e_t \in \mathcal{M}(D_t)$, so daß für jedes $t \in \boldsymbol{T}$ und jedes $p \in \boldsymbol{P}$ die Multimenge e_t mit den Multimengen $F_{p,t}$ und $F_{t,p}$ auswertungsverträglich (Definition 5.11) ist.*

Damit sind also für alle $t \in \boldsymbol{T}$, $p \in \boldsymbol{P}$ durch $F_{p,t}, F_{t,p} \in \mathcal{M}(\mathrm{Abb}(D_t, C_p))$ und $e_t \in \mathcal{M}(D_t)$ Multimengen $F_{p,t}(e_t), F_{t,p}(e_t) \in \mathcal{M}(C_p)$ gegeben.

Definition 6.5. *Ein Prä-Schritt* $e = (e_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$ *eines gefärbten Netzes* $CN = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (C_p)_{\boldsymbol{P}}, (D_t)_{\boldsymbol{T}}, (F_{x,y})_{(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})})$ *ist ein* ***Schritt****, wenn für jedes* $p \in \boldsymbol{P}$ *sowohl die Familie* $\left(F_{p,t}(e_t)\right)_{t\in\boldsymbol{T}}$ *als auch die Familie* $\left(F_{t,p}(e_t)\right)_{t\in\boldsymbol{T}}$ *addierbar (Definition 5.7) ist. Die Menge aller Schritte von* CN *heißt* E_{CN}*.*

Bemerkung 6.6. Sei $e(e_t)_{t\in\boldsymbol{T}} \in E_{CN}$ ein beliebiger Schritt von CN und $\widetilde{t} \in \boldsymbol{T}$. Dann ist auch $e' := (e'_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$ mit $e'_{\widetilde{t}} := e_{\widetilde{t}}$ und $e'_t := \emptyset_{D_t}$ für alle $t \in \boldsymbol{T}\backslash\widetilde{t}$ ein Schritt, also $e' \in E_{CN}$.

Sei $m = (m_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$ eine Markierung und $e = (e_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$ ein Schritt eines gefärbten Netzes CN. Der Schritt e heißt **aktiviert** in der Markierung m, wenn für alle $p \in \boldsymbol{P}$

$$m_p \geq \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{p,t}(e_t)$$

gilt. Dann ist die durch e bewirkte *Nachfolgemarkierung* m' von m gegeben als $m' := (m'_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$ mit

$$m'_p := m_p - \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{p,t}(e_t) + \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{t,p}(e_t).$$

Die Aktivierungsbedingung impliziert, daß die gewichteten Mengen $m'_p \in \mathcal{M}^{\pm}(C_p)$ nichtnegativ sind, also Multimengen: $m'_p \in \mathcal{M}(C_p)$.

Sei eine Schaltregel $E \subseteq E_{CN}$ gegeben. Um wie gewünscht ein Transitionssystem $(M_{CN}, E, \mathit{Trans}_E)$ zu erhalten, definieren wir $\mathit{Trans}_E \subseteq M_{CN} \times E \times M_{CN}$ entsprechend den gerade vorgestellten Konzepten wie folgt:

Definition 6.7. *Für* $m, m' \in M_{CN}$ *und* $e \in E$ *mit* $m = (m_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$*,* $m' = (m'_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$*,* $e = (e_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$ *gilt*

$$\begin{aligned}(m, e, m') \in \mathit{Trans}_E :\Longleftrightarrow \forall\, p \in \boldsymbol{P}\colon \Big[\quad & m_p \geq \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{p,t}(e_t) \\ \wedge\ & m'_p = m_p - \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{p,t}(e_t) + \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{t,p}(e_t)\Big].\end{aligned}$$

Für $(m, e, m') \in \mathit{Trans}_E$ schreibt man auch $m \xrightarrow{e}_E m'$.

Geht es in erster Linie nur um die Zustände und ihre Übergänge, aber nicht darum, durch welche Ereignisse diese verursacht werden, so kann man statt Trans_E die Relation $\rightarrow_E \subseteq M_{CN} \times M_{CN}$ verwenden, die wie folgt definiert ist:

Definition 6.8. *Für* $m, m' \in M_{CN}$ *gilt*

$$m \rightarrow_E m' \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, e \in E\colon m \xrightarrow{e}_E m'.$$

$(M_{CN}, \rightarrow_E)$ ist ein gerichteter Graph mit der Knotenmenge M_{CN} und der Kantenmenge $\rightarrow_E$. Der reflexive und transitive Abschluß von $\rightarrow_E$ wird mit $\xrightarrow{*}_E$ bezeichnet:

Definition 6.9. *Es ist*

$$\xrightarrow{*}_E \;:=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow_E{}^n$$

(mit $\rightarrow_E{}^0 = \{(m,m) \mid m \in M_{CN}\}$*).*

Definition 6.10. *Für eine Markierung* $m \in M_{CN}$ *heißt* $m' \in M_{CN}$ *von* m *aus* ***erreichbar****, wenn* $m \xrightarrow{*}_E m'$ *gilt. Die Menge aller von* m *aus erreichbaren Markierungen bezeichnet man mit* $[m\rangle_E$*, es wird also definiert*

$$[m\rangle_E := \{m' \in M_{CN} \mid m \xrightarrow{*}_E m'\}.$$

Für $M \subseteq M_{CN}$ *setzt man*

$$[M\rangle_E := \bigcup_{m\in M} [m\rangle_E.$$

Neben der Möglichkeit, alle Schritte des gefärbten Netzes als Ereignisse zuzulassen ($E = E_{CN}$), sind die folgenden beiden Möglichkeiten für die Festlegung von E erwähnenswert:

- $E = E_{CN}^{\text{l-fin}}$ (siehe nachfolgende Definition 6.11), die Menge aller **lokal-endlich agierenden Schritte** (von jedem Schritt sind an jeder Stelle nur endlich viele Marken betroffen).
- $E = E_{CN}^{\text{fin}}$ (siehe nachfolgende Definition 6.11), die Menge aller **endlich agierenden Schritte** (bei jedem Schritt sind nur endlich viele Stellen und an jeder Stelle nur endlich viele Marken betroffen).

Definition 6.11. $E_{CN}^{\text{l-fin}}, E_{CN}^{\text{fin}} \subseteq E_{CN}$ *sind gegeben durch:*

$$E_{CN}^{\text{l-fin}} := \Big\{ (e_t)_{t\in\boldsymbol{T}} \in E_{CN} \;\Big|\; \forall\, p \in \boldsymbol{P}: \Big[\sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{p,t}(e_t) \text{ und } \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{t,p}(e_t) \text{ sind endlich} \Big] \Big\}$$

$$E_{CN}^{\text{fin}} := \Big\{ (e_t)_{t\in\boldsymbol{T}} \in E_{CN}^{\text{l-fin}} \;\Big|\; \Big\{ p \in \boldsymbol{P} \mid \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{p,t}(e_t) \neq \emptyset_{C_p} \vee \sum_{t\in\boldsymbol{T}} F_{t,p}(e_t) \neq \emptyset_{C_p} \Big\} \text{ ist endlich} \Big\}$$

Wenn $\boldsymbol{P}$ eine endliche Menge ist, gilt zwangsläufig $E_{CN}^{\text{l-fin}} = E_{CN}^{\text{fin}}$.

E_{CN}^{fin} ist oft die einzige Schaltregel, die für gefärbte Netze überhaupt betrachtet wird; oder es werden daraus sogar nur *Elementarschritte* zugelassen, d. h. Schritte $(e_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$, bei denen genau ein $\widetilde{t} \in \boldsymbol{T}$ existiert mit $\#(e_{\widetilde{t}}) = 1$, wobei alle anderen e_t leer sind.

6.3 Invarianten

Für die durch eine Schaltregel $E \subseteq E_{CN}$ festgelegte Relation $\rightarrow_E$ kann man Fragen der Erreichbarkeit betrachten und gewisse invariante Eigenschaften anzugeben versuchen. Ein Tupel (CN, m_0) aus einem gefärbten Netz CN und einer Markierung $m_0 \in M_{CN}$ (der **Anfangsmarkierung**) bezeichnet man als **gefärbtes Netzsystem**. Oft will man für ein gefärbtes Netz CN nicht beliebige Markierungen aus M_{CN} zulassen, sondern es wird eine Menge $M_0 \subseteq M_{CN}$ von erlaubten Anfangsmarkierungen vorgegeben. Das Tupel (CN, M_0) bestimmt dann die Menge $\{(CN, m_0) \mid m_0 \in M_0\}$ von gefärbten Netzsystemen (»die (CN, M_0)-Netzsysteme«). Unter diesen Gegebenheiten kann man den Begriff der Invarianten sehr allgemein wie folgt formalisieren:

Definition 6.12. *Sei CN ein gefärbtes Netz, $M_0 \subseteq M_{CN}$ und $E \subseteq E_{CN}$. Eine **Invariante** der (CN, M_0)-Netzsysteme bezüglich E ist ein Tupel $(I, \mathfrak{I}, M_{\mathrm{ind}})$ aus einer Menge I, einer Abbildung $\mathfrak{I}\colon M_{CN} \rightarrow I$ und einer Menge $M_{\mathrm{ind}} \subseteq M_{CN}$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $M_0 \subseteq M_{\mathrm{ind}}$

(ii) Ist $m \in M_{\mathrm{ind}}$ und $m' \in M_{CN}$ mit $m \rightarrow_E m'$, so gilt $m' \in M_{\mathrm{ind}}$ und $\mathfrak{I}(m) = \mathfrak{I}(m')$.

*Hat man eine Invariante $(I, \mathfrak{I}, M_{\mathrm{ind}})$ gemäß dieser Definition, so wird auch die Abbildung $\mathfrak{I}$ als Invariante bezeichnet; M_{ind} ist ihr **Induktionsbereich**.*

Aus den Bedingungen der Definition 6.12 folgt: $[M_0\rangle_E \subseteq M_{\mathrm{ind}}$ (alle erreichbaren Zustände sind demnach in M_{ind} enthalten), und $\mathfrak{I}$ ist für jedes $m \in M_{\mathrm{ind}}$ (insbesondere also für jedes $m \in M_0$) auf der Menge $[m\rangle_E$ konstant; das heißt $\forall\, m' \in [m\rangle_E\colon \mathfrak{I}(m') = \mathfrak{I}(m)$. Damit können Invarianten Aussagen über *Nichterreichbarkeit* von Zuständen machen:

Bemerkung 6.13. Sei $(I, \mathfrak{I}, M_{\mathrm{ind}})$ eine Invariante eines gefärbten Netzes CN bezüglich einer Schaltregel $E \subseteq E_{CN}$. Seien $m_1, m_2 \in M_{CN}$. Es gelte $\mathfrak{I}(m_1) \neq \mathfrak{I}(m_2)$. Dann existiert kein $m \in M_{\mathrm{ind}}$ mit $m_1 \in [m\rangle_E \wedge m_2 \in [m\rangle_E$. Insbesondere gilt, falls $m_1 \in M_{\mathrm{ind}}$ ist, $m_2 \notin [m_1\rangle_E$ und entsprechend, falls $m_2 \in M_{\mathrm{ind}}$ ist, $m_1 \notin [m_2\rangle_E$.

Beweis. Sei $m \in M_{\mathrm{ind}}$ mit $m_1 \in [m\rangle_E$ und $m_2 \in [m\rangle_E$. Nach Definition von $[m\rangle_E$ gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 {\rightarrow_E}^{n_1} m$ und $m_2 {\rightarrow_E}^{n_2} m$. Durch Induktion über n_1 bzw. n_2 folgt $\mathfrak{I}(m_1) = \mathfrak{I}(m) = \mathfrak{I}(m_2)$ im Widerspruch zu $\mathfrak{I}(m_1) \neq \mathfrak{I}(m_2)$. □

Bemerkung 6.14. Sei CN ein gefärbtes Netz, $M_0 \subseteq M_{CN}$ und seien $E_1, E_2 \subseteq E_{CN}$ Schaltregeln mit $E_2 \subseteq E_1$. Ist ein Tupel $(I, \mathfrak{I}, M_{\mathrm{ind}})$ eine Invariante bezüglich E_1, so ist es auch eine Invariante bezüglich E_2.

Beweis. Nur die Bedingung (ii) der Definition 6.12 muß überprüft werden. Da sie für E_1 erfüllt ist, ist sie das auch für E_2; denn mit $m \rightarrow_{E_2} m'$ gilt stets auch $m \rightarrow_{E_1} m'$. □

In der Literatur (so zum Beispiel [17]) versteht man unter Invarianten eines Transitionssystems häufig *Prädikate* auf der Menge der Zustände (in diesem Fall also Abbildungen $p\colon M_{CN} \to \{\mathsf{wahr}, \mathsf{falsch}\}$), die gewisse Eigenschaften erfüllen. Genauer unterscheidet man zwischen *»Invarianten«* schlechthin und *»induktiven Invarianten«* – bei ersteren kommt es nur auf erreichbare Zustände an, bei letzteren dagegen auf alle Zustände:

- Von einer *»Invarianten«* verlangt man lediglich, daß das Prädikat in jedem erreichbaren Zustand wahr ist ($\forall\, m \in [M_0\rangle_E\colon p(m) = \mathsf{wahr}$). In anderer Literatur (siehe etwa [9]) werden derartige Prädikate auch als *»always-true«* bezeichnet.

  Mit Invarianten im Sinne der Definition 6.12 steht dieses Konzept wie folgt in Beziehung: Ein Prädikat p ist genau dann eine Invariante (»always-true«), wenn das Tupel

  $$(\{\mathsf{wahr}, \mathsf{falsch}\}, p, [M_0\rangle_E)$$

  eine Invariante gemäß Definition 6.12 ist und

  $$\forall\, m_0 \in M_0\colon p(m_0) = \mathsf{wahr}$$

  gilt.

- Bei einer *induktiven Invarianten* (in [9] einfach als *»invariant«* bezeichnet) wird gefordert, daß sie in den Anfangszuständen wahr ist ($\forall\, m_0 \in M_0\colon p(m_0) = \mathsf{wahr}$) und bei *beliebigen* Zustandsübergängen $m \to_E m'$ ($m, m' \in M_{CN}$) im Fall $p(m) = \mathsf{wahr}$ auch $p(m') = \mathsf{wahr}$ gilt. (Jede induktive Invariante ist damit auch eine Invariante; die Umkehrung gilt aber nicht, weil nur bei den induktiven Invarianten auch die *nicht erreichbaren* Zustände eine Rolle spielen.)

  Ein Prädikat p ist genau dann eine induktive Invariante, wenn

  $$(\{\mathsf{wahr}, \mathsf{falsch}\}, p, p^{-1}(\mathsf{wahr}))$$

  eine Invariante nach Definition 6.12 ist. (Die Forderung an induktive Invarianten, daß $\forall\, m_0 \in M_0\colon p(m_0) = \mathsf{wahr}$ gelten soll, ist von Definition 6.12 ausgehend deshalb erfüllt, weil die dortige Bedingung (i) dann besagt, daß $M_0 \subseteq p^{-1}(\mathsf{wahr})$ ist.)

Ein gegenüber Definition 6.12 etwas anderer Ansatz für die Klärung des Begriffs »Invariante« sieht wie folgt aus:

Definition 6.15. *Sei CN ein gefärbtes Netz, $M_0 \subseteq M_{CN}$ und $E \subseteq E_{CN}$. Als **Invariante** der (CN, M_0)-Netzsysteme bezüglich E bezeichnet man auch ein Tupel $(\sim, M_{\mathrm{ind}})$ aus einer Äquivalenzrelation $\sim\, \subseteq M_{CN} \times M_{CN}$ und einer Menge $M_{\mathrm{ind}} \subseteq M_{CN}$, das folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) $M_0 \subseteq M_{\mathrm{ind}}$

(ii) Ist $m \in M_{\mathrm{ind}}$ und $m' \in M_{CN}$ mit $m \to_E m'$, so gilt $m' \in M_{\mathrm{ind}}$ und $m \sim m'$.

*Hat man eine Invariante $(\sim, M_{\text{ind}})$ gemäß dieser Definition, so wird auch die Äquivalenzrelation $\sim$ als Invariante bezeichnet; M_{ind} ist ihr **Induktionsbereich**.*

Wie diese beiden Auffassungen von Invarianten zueinander in Beziehung stehen, zeigen die folgenden Bemerkungen:

Bemerkung 6.16. Sei CN ein gefärbtes Netz, $M_0 \subseteq M_{CN}$ und $E \subseteq E_{CN}$. Sei $(I, \mathfrak{I}, M_{\text{ind}})$ eine Invariante gemäß Definition 6.12. Nun wird die Relation $\sim_{\mathfrak{I}} \subseteq M_{CN} \times M_{CN}$ definiert durch

$$m \sim_{\mathfrak{I}} m' \quad :\Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}(m) = \mathfrak{I}(m')$$

für $m, m' \in M_{CN}$. Dann ist $\sim_{\mathfrak{I}}$ eine Äquivalenzrelation, und $(\sim_{\mathfrak{I}}, M_{\text{ind}})$ ist eine Invariante gemäß Definition 6.15.

Bemerkung 6.17. Sei CN ein gefärbtes Netz, $M_0 \subseteq M_{CN}$ und $E \subseteq E_{CN}$. Sei $(\sim, M_{\text{ind}})$ eine Invariante gemäß Definition 6.15. Nun sei

$$I_\sim := {}^{M_{CN}}\!/_{\sim}$$

die Menge der Äquivalenzklassen, und die Abbildung

$$\mathfrak{I}_\sim \colon M_{CN} \to I_\sim$$

sei definiert durch die Forderung

$$m \in \mathfrak{I}_\sim(m)$$

für alle $m \in M_{CN}$, das heißt

$$\mathfrak{I}_\sim(m) = \{m' \in M_{CN} \mid m \sim m'\}.$$

Dann ist $(I_\sim, \mathfrak{I}_\sim, M_{\text{ind}})$ ist eine Invariante gemäß Definition 6.12.

Bemerkung 6.18. Ausgehend von einer Invarianten $(\sim, M_{\text{ind}})$ gemäß Definition 6.15 ergibt sich mit den Definitionen aus Bemerkung 6.17 eine Abbildung

$$\mathfrak{I}_\sim \colon M_{CN} \to I_\sim$$

und hieraus mit der Definition aus Bemerkung 6.16 eine Äquivalenzrelation

$$\sim_{\mathfrak{I}_\sim} \subseteq M_{CN} \times M_{CN}.$$

Wie man leicht sieht, gilt dabei $\sim_{\mathfrak{I}_\sim} = \sim$, das heißt, man erhält wieder die ursprüngliche Äquivalenzrelation zurück. In einem gewissen Sinne sind die beiden Definitionen von Invarianten also gleichwertig, der wesentliche Unterschied liegt nur im Vorhandensein der Menge I in Definition 6.12.

Bei der Interpretation der später in Abschnitt 8 definierten linearen Invarianten hat man als Induktionsbereich die gesamte Menge M_{CN} (siehe Definition 8.16 und Corollar 8.21). (Die ausgezeichnete Menge M_0 der Anfangsmarkierungen spielt damit keine besondere Rolle mehr.) Für diesen Fall $M_{\text{ind}} = M_{CN}$ lassen sich Invarianten – dargestellt durch Äquivalenzrelationen, d. h. gemäß Definition 6.15 – auch wie folgt charakterisieren:

Bemerkung 6.19. Eine Äquivalenzrelation $\sim\ \subseteq M_{CN} \times M_{CN}$ ist genau dann eine Invariante der (CN, M_0)-Netzsysteme bezüglich der Schaltregel $E \subseteq E_{CN}$ mit dem Induktionsbereich M_{CN}, wenn gilt

$$\sim_E \subseteq \sim,$$

wobei $\sim_E$ die durch $\rightarrow_E$ induzierte Äquivalenzrelation bezeichnet, also den reflexiven und transitiven Abschluß von $\rightarrow_E \cup \rightarrow_E{}^{-1}$:

$$\sim_E := (\rightarrow_E \cup \rightarrow_E{}^{-1})^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\rightarrow_E \cup \rightarrow_E{}^{-1})^n$$

Diese Charaktisierung macht deutlich, daß bei den Invarianten mit $M_{\text{ind}} = M_{CN}$ keine Bedeutung hat, daß $(M_{CN}, \rightarrow_E)$ ein *gerichteter* Graph ist: Die Richtung des »Zeitpfeils« geht bei dieser Betrachtungsweise verloren.

Beispiel 6.20. Wir betrachten für $G = {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ das gefärbte Netz $CN = CN_G$ aus Beispiel 6.2. Dabei kann man, um einfachere Schreibweisen zu ermöglichen, M_{CN} mit $\mathcal{M}(C_p) = \mathcal{M}(G)$ identifizieren, denn es gibt nur eine einzige Stelle; ähnlich kann man auch E_{CN} mit $\mathcal{M}(D_{t_1}) \times \mathcal{M}(D_{t_2}) = \mathcal{M}(G) \times \mathcal{M}(G)$ identifizieren. Für die Fälle, daß $G = {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$ mit einer *geraden* Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist, ist jedes Element von G entweder gerade oder ungerade. (Bei ungeradem n ist eine solche Aufteilung nicht sinnvoll möglich.) Dann kann man eine Relation

$$\sim\ \subseteq M_{CN} \times M_{CN}$$

definieren mit $m \sim m'$ genau dann, wenn die gewichtete Menge $m' - m$ gleichviele gerade wie ungerade Elemente enthält – das heißt genauer:

$$m \sim m' \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{Die gewichtete Menge } m' - m \text{ ist endlich,}\\ \text{und es gilt } \displaystyle\sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ gerade}}} (m' - m)(g) = \sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ ungerade}}} (m' - m)(g).\end{array}$$

Diese Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, wie man leicht sieht. Man kann bei $G = {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$ mit einem geraden $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ aufgrund der Zustandsübergangsrelationen $\rightarrow_E$ zu beliebigen $E \subseteq E_{CN}$ vermuten, daß $\sim$ im Sinne von Definition 6.15 eine Invariante der (CN, M_{CN})-Netzsysteme bezüglich E mit Induktionsbereich M_{CN} ist; wir werden dies später auf algebraischem Wege beweisen. Im Fall $G = \mathbb{Z}$ mit $E = E_{CN}$ dagegen ist $\sim$ offenbar keine Invariante; man betrachte dann nämlich die Schaltfolge

$$m := \emptyset_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{(\chi_{\{2n|n\in\mathbb{N}\}}, \emptyset_{\mathbb{Z}})} \chi_{\mathbb{N}} \xrightarrow{(\emptyset_{\mathbb{Z}}, \chi_{\{2n+1|n\in\mathbb{N}\}})} \{\!\{0\}\!\} =: m',$$

bei der im ersten Schritt die Transition t_1 für jede gerade natürliche Zahl einmal schaltet und im zweiten Schritt die Transition t_2 für jede ungerade natürliche Zahl einmal schaltet. $m' - m$ ist endlich und hat nur ein einziges Element, so daß $m \not\sim m'$ gelten muß. (Man sieht hieran auch, daß man $\sim$ bei der gewünschten Bedeutung nicht für solche Paare (m, m'), für die die Differenz $m' - m$ unendlich ist, so umdefinieren kann, daß $\sim$ doch noch zu einer Invarianten mit den gewünschten Eigenschaften würde.)

Wie dieses Beispiel zeigt, können verschiedene, aber ähnliche gefärbte Netze Invarianten haben, die trotz der Unterschiede der Netze im wesentlichen gleich sind. Um die Eigenschaften der Farbmengen, der Schaltmodi und der Kanten vom konkreten gefärbten Netz abstrahierend behandeln zu können, werden wir die Methoden der algebraischen Spezifikation verwenden.

7 Algebraische Netze

Als *»algebraisches Netz«* bezeichnen wir eine Beschreibung, die mittels der im Abschnitt 2 vorgestellten Methoden der *algebraischen Spezifikation* ein »Skelett« für Netze festlegt. Zusammen mit zum Netz passenden *Algebren* entstehen hieraus konkrete *gefärbte Netze,* wie sie im vorangegangenen Abschnitt 6 definiert wurden; diese werden als *Interpretationen* des algebraischen Netzes bezeichnet. (Entsprechend könnte man auch Netz*systeme* betrachten, bei denen zusätzlich Anfangsmarkierungen algebraisch anzugeben wären.) Das Verhalten der gefärbten Netze, d. h. die zugehörigen Transitionssysteme (Definition 6.7), hängt außerdem von der gewünschten *Schaltregel* ab. Bereits am algebraischen Netz lassen sich jedoch manche Eigenschaften feststellen, die für jede Interpretation des algebraischen Netzes Gültigkeit haben; ein Beispiel hierfür bietet der folgende Abschnitt 8 über lineare Invarianten.

Definition 7.1. *Ein **algebraisches Netz** ist ein Tupel*

$$AN = \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}}), (s_p)_{p \in \boldsymbol{P}}, (X_t)_{t \in \boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(x,y) \in (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}) \cup (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P})}\big),$$

wobei folgendes gilt:

(i) ***P** und **T** sind disjunkte Mengen. Die Elemente von **P** heißen **Stellen*** (places) *von AN, die Elemente von **T** heißen **Transitionen** von AN.*

(ii) $(S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}})$ *ist eine Endlichkeitsspezifikation (Definition 4.2).*

(iii) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ ist $s_p \in S$.

(iv) Für jedes $t \in \boldsymbol{T}$ ist $X_t \subseteq \Xi$ ein Variablensystem bezüglich (S, Ω).

(v) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ und jedes $t \in \boldsymbol{T}$ gilt $\mathfrak{F}_{p,t}, \mathfrak{F}_{t,p} \in \mathcal{M}(\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t))$.

Geht man von einer Gleichungsspezifikation aus und nicht von einer Endlichkeitsspezifikation, so kann man nach Bemerkung 4.4 trotzdem ein algebraisches Netz gemäß obiger Definition erhalten, da eine der Gleichungsspezifikation gleichwertige Endlichkeitsspezifikation existiert.

Graphische Darstellungen von algebraischen Netzen erfolgen analog wie bei gefärbten Netzen; siehe Seite 52 und das später folgende Beispiel 7.3.

Definition 7.2. *Es sei*

$$AN = \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}}), (s_p)_{\boldsymbol{P}}, (X_t)_{\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}) \cup (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P})}\big)$$

ein algebraisches Netz. Dabei sei $X_t = (X_{t,s})_{s \in S}$ für $t \in \boldsymbol{T}$ die Darstellung des jeweiligen Variablensystems als Familie. Weiter sei

$$A = \big((A_s)_{s \in S}, (f_\omega)_{\omega \in \Omega}\big)$$

ein Modell von $(S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}})$ (Definition 4.3). Für $t \in \boldsymbol{T}$ sei nun

$$B_t := \{\alpha = (\alpha_s)_{s \in S} \mid \forall\, s \in S\colon \alpha_s \in \text{Abb}(X_{t,s}, A_s)\}$$

die Menge aller Belegungen (Definition 1.17) von X_t. Damit hat man gemäß Definition 1.22 für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ und jedes $t \in \boldsymbol{T}$ eine Abbildung

$$\mathrm{interpret}_A\colon \mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t) \to \mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p}).$$

(Die Bezeichnung $\mathrm{interpret}_A$ benutzen wir dabei, ohne darin das jeweils zugrundeliegende Variablensystem und die jeweilige »Zielsorte« ausdrücklich zu erwähnen, denn diese sind immer aus dem Zusammenhang zu erkennen.)

Gemäß Definition 5.9 hat man damit auch Abbildungen

$$\mathrm{interpret}_A\colon \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{interpret}_A}(\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t)) \to \mathcal{M}^{\pm}(\mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p}))$$

*für die entsprechenden mit $\mathrm{interpret}_A$ auswertungsverträglichen gewichteten Mengen. Sind sowohl alle $\mathfrak{F}_{p,t}$ als auch alle $\mathfrak{F}_{t,p}$ mit den jeweiligen Abbildungen auswertungsverträglich (d. h. $\mathfrak{T}_{p,t}$, $\mathfrak{T}_{t,p} \in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{interpret}_A}(\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t))$), so heißt AN **interpretierbar** durch A. Die **Interpretation von** AN durch A ist dann das gefärbte Netz (Definition 6.1)*

$$\big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (A_{s_p})_{p\in\boldsymbol{P}}, (B_t)_{t\in\boldsymbol{T}}, (F_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

mit

$$\begin{aligned} F_{p,t} &:= \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{F}_{p,t}),\\ F_{t,p} &:= \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{F}_{t,p}) \end{aligned}$$

für $p \in \boldsymbol{P}$, $t \in \boldsymbol{T}$.

(Zu einem beliebig vorgegebenen gefärbten Netz CN gibt es immer ein algebraisches Netz AN, von dem CN eine Interpretation ist: Jede Farbmenge und jede Menge von Schaltmodi kann durch eine Sorte beschrieben werden, die zu jedem Element der jeweiligen Menge ein eigenes Konstantensymbol besitzt; jede in einer Kante vorkommende Abbildung von einem D_t in ein C_p kann durch ein eigenes Operationssymbol vertreten werden.)

Beispiel 7.3. Sei die Endlichkeitsspezifikation $\mathit{SPECF}_1 := \mathit{SPECF} = (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ wie in Beispiel 4.8 definiert und sei

$$AN_1 := \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, \mathit{SPECF}_1, (s_p)_{p\in\boldsymbol{P}}, (X_t)_{t\in\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

das algebraische Netz mit

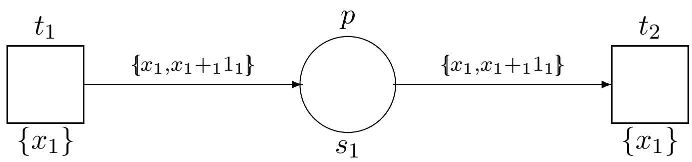
$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &:= \{p\}, \quad \boldsymbol{T} := \{t_1, t_2\},\\ s_p &:= s_1,\\ X_{t_1} := X_{t_2} &:= \{x_1\},\\ \mathfrak{F}_{p,t_1} &:= \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,s_1}(\{x_1\})},\\ \mathfrak{F}_{t_1,p} &:= \big\{x_1, x_1 +_1 1_1\big\},\\ \mathfrak{F}_{p,t_2} &:= \big\{x_1, x_1 +_1 1_1\big\},\\ \mathfrak{F}_{t_2,p} &:= \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,s_1}(\{x_1\})}. \end{aligned}$$

$SPECF_2 := SPEC_{SPECF}$ sei die gemäß Bemerkung 4.4 aus der Gleichungsspezifikation $SPEC := (S, \Omega, \Xi, G)$ (vgl. Beispiel 2.21) gewonnene Endlichkeitsspezifikation und

$$AN_2 := \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, SPECF_2, (s_p)_{p \in \boldsymbol{P}}, (X_t)_{t \in \boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(x,y) \in (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}) \cup (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{P})}\big)$$

ein ansonsten AN_1 gleichendes algebraisches Netz.

Beide Netze können wie folgt dargestellt werden:



In Beispiel 6.2 hatten wir in Abhängigkeit von einer Menge $G = \mathbb{Z}/_{n\,\mathbb{Z}}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ein gefärbtes Netz CN_G definiert. Jenes Netz CN_G läßt sich gegebenenfalls als Interpretation des algebraischen Netzes AN_1 und in jedem Fall als Interpretation des algebraischen Netzes AN_2 auffassen, indem wir auf die in Beispiel 2.21 angegebenen Algebren zurückgreifen:

- Bei AN_2 schreibt die Endlichkeitsspezifikation keinerlei Endlichkeitsterme vor, und also kommen zunächst alle in Beispiel 2.21 genannten $SPEC$-Algebren $A = \big((A_s)_{s \in S}, (f_\omega)_{\omega \in \Omega}\big)$ in Frage. In jedem Fall ist AN_2 durch A interpretierbar, und bei $n_1 = n$ ist $A_{s_1} = \mathbb{Z}/_{n_1\,\mathbb{Z}} = G$; gilt darüberhinaus $f_{1_1} = 1 + n_1\,\mathbb{Z}$, so ist die Interpretation von AN_2 durch A gerade CN_G.

- Bei AN_1 stellt der hinzukommende Endlichkeitsterm strengere Anforderungen an die Algebren. Zum für AN_2 Gesagten kommt hinzu, daß n nicht 0 sein darf – bei $n = n_1 \neq 0$ ist CN_G die Interpretation von AN_1 durch die $SPECF_1$-Algebra A, bei $n = n_1 = 0$ dagegen ist A gar keine $SPECF_1$-Algebra, so daß AN_1 nicht durch A interpretierbar sein kann.

8 Lineare Invarianten

Den Begriff *»lineare Invariante«* verwenden wir für ein Analogon der *»S-Invarianten«,* wie sie schon lange von *Stellen-Transitions-Netzen* her bekannt sind ([20], [21]). Der hier verwendete Ansatz zur Definition linearer Invarianten algebraischer Petrinetze lehnt sich an [31] an. Da jedoch in der vorliegenden Arbeit die Definitionen für Petrinetze durch das weitestmögliche Zulassen von Unendlichkeit allgemeiner sind, wird die Behandlung linearer Invarianten aufwendiger; dabei zeigt sich, warum wir in der Definition algebraischer Petrinetze statt der üblichen Gleichungsspezifikationen die in Abschnitt 4 behandelten *Endlichkeitsspezifikationen* zugrundegelegt haben.

Bei Stellen-Transitions-Netzen kann auf jeder Stelle nur eine Anzahl *ununterscheidbarer* Marken liegen. Deshalb lassen sich die Veränderungen der Markierung, die beim Schalten von Transitionen möglich sind, durch eine *Inzidenzmatrix* mit *ganzzahligen* Komponenten darstellen. Eine S-Invariante ist dabei ein durch die Stellenmenge indizierter Vektor von Zahlen [20]. Bei gefärbten Netzen dagegen können die Marken auf einer Stelle voneinander verschieden sein. Die Inzidenzmatrix zu einem gefärbten Netz enthält deshalb nicht ganze Zahlen, sondern (bei unseren Netzen ohne flexible Kanten) *gewichtete Mengen von Abbildungen,* um die verschiedenen Schaltmodi der Transitionen berücksichtigen zu können. Eine S-Invariante zu einem gefärbten Netz ist ein durch die Stellenmenge indizierter Vektor, dessen Komponenten ebenfalls gewichtete Mengen von Abbildungen sind.

Beim abstrahierenden Schritt von gefärbten zu algebraischen Netzen treten an die Stelle der *Abbildungen,* deren Definitions- und Wertebereiche erst durch konkrete Algebren festgelegt wären, geeignete *Substitutionen*. Auf der abstrakten Ebene der Terme können mit Hilfe dieser Substitutionen Beobachtungen gemacht werden, die in jeder Algebra (in jeder *Interpretation)* durch Trägermengen, Konstanten und Operationen konkrete Entsprechungen erhalten. Wir behandeln in Abschnitt 8.1 zunächst die abstrakte Ebene und definieren anhand der Termsicht, was eine lineare Invariante eines algebraischen Petrinetzes ist. Abschnitt 8.2 zeigt, welche konkrete Bedeutung solche Invarianten in den Interpretationen haben. Der Zweck einiger Details der abstrakten Definitionen wird erst dann deutlich, wenn schließlich in Satz 8.20 die konkrete Invarianzeigenschaft zu einer algebraisch dargestellten linearen Invarianten bewiesen wird.

Wir behandeln durchgängig nur die allgemeinste Schaltregel $E = E_{CN}$; laut Bemerkung 6.14 sind unsere Resultate zu Invarianten damit für beliebige Schaltregeln gültig. Für eingeschränkte Schaltregeln nur mit lokal-endlich agierenden Schritten ($E \subseteq E_{CN}^{\text{l-fin}}$) oder nur mit endlich agierenden Schritten ($E \subseteq E_{CN}^{\text{fin}}$) sind lineare Invarianten einfacher handzuhaben, insbesondere sind Endlichkeitsspezifikationen dann entbehrlich. Diese Fälle sind in [26] abgehandelt und werden hier nicht wiederholt, da in dieser Arbeit die Benutzung von Endlichkeitsspezifikationen im Vordergrund steht.

8.1 Algebraische Sicht

Definition 8.1. *Sei*

$$AN = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}}), (s_p)_{\boldsymbol{P}}, (X_t)_{\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})})$$

*ein algebraisches Netz ($\Sigma := (S, \Omega)$, $SPEC := (S, \Omega, \Xi, G)$, $SPECF := (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}})$). Die **algebraische Inzidenzmatrix** (kurz: die Inzidenzmatrix) von AN ist definiert als*

$$\mathfrak{D} := (\mathfrak{D}_{p,t})_{(p,t)\in\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T}}$$

mit

$$\mathfrak{D}_{p,t} := -\mathfrak{F}_{p,t} + \mathfrak{F}_{t,p} \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t))$$

für $p \in \boldsymbol{P}$, $t \in \boldsymbol{T}$.

Die *Zeilen* der Matrix $\mathfrak{D}$ werden durch $\boldsymbol{P}$, die *Spalten* durch $\boldsymbol{T}$ indiziert. Die Matrix $\mathfrak{D}$ kann unendlich viele Zeilen und unendlich viele Spalten haben.

Bei S-Invarianten von Stellen-Transitions-Netzen spielt das Matrixprodukt aus einem $\boldsymbol{P}$-indizierten Zeilenvektor, einer *Gewichtung,* mit der Inzidenzmatrix des jeweiligen Netzes eine wichtige Rolle. Analog dazu will man auch bei algebraischen Netzen ein Matrixprodukt von geeigneten $\boldsymbol{P}$-indizierten Zeilenvektoren mit der $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}$-Matrix $\mathfrak{D}$ berechnen können. Ein solches Produkt ist ein $\boldsymbol{T}$-indizierter Zeilenvektor; seine Komponenten sind allgemein Elemente von abelschen Gruppen. Wie bei gewöhnlichen S-Invarianten kann eine Gewichtung nur dann eine lineare Invariante sein, wenn das Produkt aus der Gewichtung und der Inzidenzmatrix den Nullvektor ergibt.

Diese Forderung reicht jedoch anders als bei herkömmlichen Petrinetzen nicht aus, wenn Schaltregeln zugelassen werden, die in einem einzelnen Schritt unendlich viele Marken betreffen können (vgl. Definition 6.5). Solche Schaltregeln machen strengere Anforderungen an die Gewichtungen nötig; hierzu wird uns der Begriff der *E_{CN}-zulässigen Gewichtung* dienen.

Die Komponenten des Produktes von Gewichtung und Inzidenzmatrix liegen bei den hier vorgestellten linearen Invarianten in abelschen Gruppen $\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X_t))$ zu einem $\widetilde{s} \in S$. (Verallgemeinerungen sind denkbar durch Betrachten anderer abelscher Gruppen, insbesondere Faktorgruppen der hier verwendeten entsprechend [3].) Diese Gruppen kann man als die Quotienten der Gruppen $\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t))$ nach Äquivalenzrelationen auffassen, welche durch die Äquivalenzrelationen $\equiv^{\mathfrak{T}_{\Sigma}(X_t)}_{G,\widetilde{s}}$ auf $\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t)$ (Definition 2.14) induziert werden (vgl. Definition 2.16). Ist nämlich allgemein $\sim\, \in A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf einer beliebigen Menge A, so definiert $\sim$ zunächst über die zugehörige kanonische Abbildung $(a \mapsto [a])\colon A \to {}^{A}/_{\sim}$ gemäß Definition 5.9 mit Bemerkung 5.10 eine Abbildung $(M \mapsto [M])\colon \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A) \to \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}({}^{A}/_{\sim})$; dabei ist für $M \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)$

die endliche gewichtete Menge $[M] \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}({}^{A}/_{\sim})$ gegeben durch $[M](b) = \sum_{\substack{a \in A \\ [a]=b}} M(a)$ für alle $b \in {}^{A}/_{\sim}$. Nun definiert die Abbildung $M \mapsto [M]$ in natürlicher Weise eine neue Äquivalenzrelation $\sim \subseteq \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A) \times \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)$ mit $M \sim N \quad :\Leftrightarrow \quad [M] = [N]$. Infolge der Konstruktion ist ${}^{\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)}/_{\sim}$ mit dieser Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A)$ im wesentlichen das gleiche wie $\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}({}^{A}/_{\sim})$ mit der zugrundeliegenden Äquivalenzrelation auf A und ist so mit der Struktur einer abelschen Gruppe versehen.

Definition 8.2. *Es sei wie in Definition 8.1 ein algebraisches Netz AN gegeben. Für jedes $s \in S$ sei $y_s \in \Xi_s$ eine Variable. $Y := \left(\{y_s\}\right)_{s \in S}$ sei das aus diesen Variablen gebildete Variablensystem. Ferner sei $\widetilde{s} \in S$ eine beliebige Sorte. Eine* ***algebraische Gewichtung*** *(der Sorte $\widetilde{s}$ mit dem Variablensystem Y) zu AN – kurz: eine Gewichtung – ist eine Familie*

$$i = (i_p)_{p \in \boldsymbol{P}}$$

mit

$$i_p \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}\Big(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})\Big).$$

i wird als Zeilenvektor aufgefaßt.

Aufbauend auf bestimmten Substitutionen wird nun eine »Multiplikation« $\underset{Y}{\longleftarrow}$ zunächst für Terme definiert, dann gemäß Definition 5.14 auf gewichtete Mengen von Termen übertragen und schließlich daraus eine Matrixmultiplikation einer $\boldsymbol{P}$-indizierten Zeile mit einer $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}$-Matrix (jeweils mit gewichteten Mengen von Termen als Komponenten) konstruiert.

Definition 8.3. *Sei (S, Ω) eine Signatur, $\Xi = (\Xi_s)_{s \in S}$ ein Variablensystem zu (S, Ω), $Y = \left(\{y_s\}\right)_{s \in S}$ eine Variablensystem mit $y_s \in \Xi_s$ für jedes $s \in S$ sowie $\widetilde{s} \in S$ eine Sorte. Weiter sei $X \subseteq \Xi$ ein beliebiges Variablensystem. Für jedes $s \in S$ wird eine Abbildung*

$$\underset{Y}{\longleftarrow} : \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\}) \times \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) \to \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X)$$

definiert durch

$$T_1 \underset{Y}{\longleftarrow} T_2 := \overline{\sigma_{\frac{T_2}{y_s}}}(T_1),$$

wobei

$$\sigma_{\frac{T_2}{y_s}} : \{y_s\} \to \mathfrak{T}_{\Omega}(X)$$

die durch

$$\sigma_{\frac{T_2}{y_s}}(y_s) := T_2$$

definierte Substitution (siehe Definitionen 1.10 und 1.11) ist.

Satz 8.4. *Sei $SPEC = (S, \Omega, \Xi, G)$ eine Gleichungsspezifikation (Definition 2.3) und $A = ((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega})$ eine $SPEC$-Algebra (Definition 2.5). Weiter sei $Y = (\{y_s\})_{s\in S}$ ein Variablensystem ($y_s \in \Xi_s$ für $s \in S$), $\widetilde{s} \in S$ eine Sorte und $X \subseteq \Xi$ ein Variablensystem, so daß gemäß Definition 8.3 für jedes $s \in S$ eine Abbildung*

$$\underset{Y}{\longleftarrow} : \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\}) \times \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) \to \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X)$$

definiert ist. Gemäß Definition 1.22 hat man für $s \in S$ Abbildungen

$$\mathrm{interpret}_A \colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\}) \to \mathrm{Abb}(A_s, A_{\widetilde{s}}),$$
$$\mathrm{interpret}_A \colon \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) \to \mathrm{Abb}(B, A_s)$$

und

$$\mathrm{interpret}_A \colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X) \to \mathrm{Abb}(B, A_{\widetilde{s}}),$$

wobei

$$B := \{\alpha = (\alpha_s)_{s\in S} \mid \forall\, s \in S \colon \alpha_s \in \mathrm{Abb}(X_s, A_s)\}$$

die Menge aller Belegungen von X in der Algebra A bezeichnet und die Menge der Belegungen von $\{y_s\}$ in A mit A_s identifiziert wird. Gemäß Definition 2.16 sei

$$\mathfrak{T}_{SPEC}(X) = \mathfrak{T}_\Sigma(X) \big/ \equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)};$$

für jedes $s \in S$ sind die Elemente von $\mathfrak{T}_{SPEC,s}(X)$ Äquivalenzklassen von Termen aus $\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$ bezüglich der Relation $\equiv_{G,s}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$. Dann induziert die Abbildung

$$\mathrm{interpret}_A \colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X) \to \mathrm{Abb}(B, A_{\widetilde{s}})$$

eine neue Abbildung

$$\mathrm{interpret}_A \colon \mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X) \to \mathrm{Abb}(B, A_{\widetilde{s}}),$$

die durch die Forderung

$$\forall\, T \in \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X) \colon \mathrm{interpret}_A([T]) := \mathrm{interpret}_A(T)$$

wohldefiniert ist (wobei $[T]$ die Äquivalenzklasse von T bezeichnet), und folgendes Diagramm ist für jedes $s \in S$ kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\}) \times \mathfrak{T}_{\Omega,s}(X) & \xrightarrow{(T,U)\mapsto [T \underset{Y}{\longleftarrow} U]} & \mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{interpret}_A \times \mathrm{interpret}_A} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{interpret}_A} \\
\mathrm{Abb}(A_s, A_{\widetilde{s}}) \times \mathrm{Abb}(B, A_s) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Abb}(B, A_{\widetilde{s}})
\end{array}$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß

$$\mathrm{interpret}_A \colon \mathfrak{T}_{SPEC,\tilde{s}}(X) \to \mathrm{Abb}(B, A_{\tilde{s}})$$

wohldefiniert ist. Dafür seien $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}_{\Omega,\tilde{s}}(X)$ gegeben mit $[T_1] = [T_2]$, d. h. mit $T_1 \equiv_{G,\tilde{s}}^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)} T_2$. Zu zeigen ist, daß $\mathrm{interpret}_A(T_1) = \mathrm{interpret}_A(T_1)$ gilt. Laut Definition 2.14 ist $(X, T_1, T_2) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(G)$. Somit ist nach Satz 2.12 (X, T_1, T_2) gültig in A, das heißt (Definition 2.4) für jede Belegung $\alpha \in B$ ist

$$\overline{\alpha}(T_1) = \overline{\alpha}(T_2).$$

Dies ist aber gerade gleichbedeutend mit

$$\mathrm{interpret}_A(T_1)(\alpha) = \mathrm{interpret}_A(T_2)(\alpha)$$

für jedes $\alpha \in B$, und somit haben wir in der Tat

$$\mathrm{interpret}_A(T_1) = \mathrm{interpret}_A(T_2).$$

Um die Kommutativität des angegebenen Diagrammes nachzuweisen, ist zu zeigen, daß die Gleichung

$$\mathrm{interpret}_A([T \underset{Y}{\leftarrow} U]) = \mathrm{interpret}_A(T) \circ \mathrm{interpret}_A(U)$$

für alle $T \in \mathfrak{T}_{\Omega,\tilde{s}}(\{y_s\})$, $U \in \mathfrak{T}_{\Omega,S}(X)$ erfüllt ist; das heißt, daß für jedes $\alpha \in B$

$$\mathrm{interpret}_A([T \underset{Y}{\leftarrow} U])(\alpha) = \mathrm{interpret}_A(T)(\mathrm{interpret}_A(U)(\alpha))$$

gilt. Diese Gleichung kann auch wie folgt geschrieben werden, wenn man $\mathrm{interpret}_A(U)(\alpha) = \overline{\alpha}(U) \in A_s$ als eine Belegung $\{y_s\} \to A$ auffaßt:

$$\overline{\alpha}(T \underset{Y}{\leftarrow} U) = \overline{\overline{\alpha}(U)}(T)$$

Daß diese Gleichung in der Tat gilt, ergibt sich durch Induktion über die Tiefe des Terms $T \in \mathfrak{T}_{\Omega,\tilde{s}}(\{y_s\})$ mit Definition 1.18 und Definitionen 8.3 und 1.11, wobei der Induktionsanfang darauf beruht, daß infolge Definition 8.3

$$\overline{\alpha}\Big(\{y_s\} \underset{Y}{\leftarrow} U\Big) = \overline{\alpha}(U) = \overline{\overline{\alpha}(U)}(y_s)$$

ist. □

Um Anomalien durch Unendlichkeiten zu vermeiden, werden zu einem gegebenen algebraischen Netz mit Endlichkeitsspezifikation durch die folgenden Definitionen nur Gewichtungen zugelassen, die bestimmte Anforderungen erfüllen. Definition 8.5 enthält Voraussetzungen, unter denen das gewünschte Matrixprodukt überhaupt erst definiert werden kann; Definition 8.6 verschärft diese Anforderungen noch so weiter, daß jede Komponente des Matrixproduktes endlich ist.

Definition 8.5. *AN sei wie in Definition 8.1 ein algebraisches Netz und habe die Inzidenzmatrix $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{p,t})_{(p,t)\in\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T}}$. Weiter sei $i = (i_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$ eine algebraische Gewichtung (Definition 8.2) der Sorte $\widetilde{s}$ mit Variablensystem $Y = (\{y_s\})_{s\in S}$. Die Gewichtung i heißt **zulässig**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ und jedes $t \in \boldsymbol{T}$ sind i_p und $\mathfrak{D}_{p,t}$ im Sinne von Definition 5.14 miteinander verträglich bezüglich $\underset{Y}{\longleftarrow}$ (so daß die gewichtete Menge

$$i_p \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D}_{p,t} \quad \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t))$$

definiert ist).

(ii) Für jedes $t \in \boldsymbol{T}$ ist die Familie

$$(i_p \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D}_{p,t})_{p\in\boldsymbol{P}}$$

von gewichteten Mengen addierbar (Definition 5.7).

Ist das der Fall, so ist das Matrixprodukt $i \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D}$ definiert als die Familie (»Zeilenvektor«)

$$i \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D} := \big((i \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D})_t\big)_{t\in\boldsymbol{T}}$$

mit

$$(i \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D})_t := \sum_{p\in\boldsymbol{P}} i_p \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D}_{p,t} \quad \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t))$$

für $t \in \boldsymbol{T}$.

Definition 8.6. *Sei*

$$AN = \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}}), (s_p)_{\boldsymbol{P}}, (X_t)_{\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

*ein algebraisches Netz (mit zugrundeliegender Gleichungsspezifikation $SPEC := (S, \Omega, \Xi, G)$ und Endlichkeitsspezifikation $SPECF := (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}})$) und $i = (i_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$ eine zulässige algebraische Gewichtung zu AN. i habe die Sorte $\widetilde{s}$ und das Variablensystem $Y = \big(\{y_s\}\big)_{s\in\S}$. i heißt E_{CN}-**zulässig**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Es gibt nur endlich viele $p \in \boldsymbol{P}$ mit $i_p \neq \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$.

(ii) $i_p \neq \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$ gilt nur für solche $p \in \boldsymbol{P}$, für die die Menge der $t \in \boldsymbol{T}$ mit $\mathfrak{D}_{p,t} \neq \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t)}$ endlich *ist.*

(iii) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ mit $i_p \neq \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$ und jedes $t \in \boldsymbol{T}$ ist die gewichtete Menge $\mathfrak{D}_{p,t}$ endlich (d. h. $\in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t))$).

(iv) Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ gilt

$$i_p \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\text{cl}_{\mathcal{R}^{\text{fin}}_{SPEC}}(\mathcal{T}^{\text{fin}}));$$

die Elemente der gewichteten Mengen i_p enthalten also nur solche Terme, die für jede $SPECF$-Algebra Endlichkeitsterme sind (siehe Satz 4.6).

Bemerkung 8.7. i sei E_{CN}-zulässig. Dann gilt $(i \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D})_t \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t))$ für jedes $t \in \boldsymbol{T}$.

Beweis. Wir erinnern daran, daß jedes i_p endlich ist. Die Behauptung gilt wegen (i) und (iii) aus Definition 8.6. □

Da die gewichteten Mengen in den Komponenten des Matrixproduktes $((i \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D})_t)_{t\in\boldsymbol{T}}$ im Fall von E_{CN}-zulässigen Gewichtungen endlich sind, gelangt man von ihnen wie auf Seite 66 erläutert durch Quotientenbildung nach den Äquivalenzrelationen $\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(X_t)}_{G,\widetilde{s}}$ in die abelschen Gruppen

$$\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X_t)).$$

Wir benutzen im folgenden jedoch nicht explizit diese Gruppen, sondern bleiben aus Gründen der Notation auf der Ebene der gewichteten Mengen von Termen und bringen die Äquivalenzrelation statt dessen in der Definition der linearen Invarianten unter:

Definition 8.8. *Sei*

$$AN = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\text{fin}}), (s_p)_{\boldsymbol{P}}, (X_t)_{\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})})$$

ein algebraisches Netz mit der Inzidenzmatrix $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{p,t})_{(p,t)\in\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T}}$; $\Sigma := (S, \Omega)$ sei die Signatur hierzu. Weiter sei $i = (i_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$ eine algebraische Gewichtung einer Sorte $\widetilde{s}$ mit Variablensystem Y zu AN. Ist i E_{CN}-zulässig und gilt

$$(i \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D})_t \equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(X_t)}_{G,\widetilde{s}} \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t)}$$

*für jedes $t \in \boldsymbol{T}$, so heißt i **lineare Invariante** für E_{CN}.*

8.2 Bedeutung in den Interpretationen

Nun ist eine Verbindung der linearen Invarianten, wie wir sie abstrakt für algebraische Netze mit Endlichkeitsspezifikation definiert haben, zu den konkreten Interpretationen (Definition 7.2) dieser algebraischen Netze anzugeben. Dabei ist unser Ziel, eine Invariante im Sinne der in Abschnitt 6.3 vorgestellten Konzepte zu erhalten; das geschieht in Corollar 8.21.

Zunächst stellen wir eine Reihe von Lemmata über gewichtete Mengen vor, die in diesem Abschnitt benötigt werden.

Lemma 8.9. $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ sei eine Familie von gewichteten Mengen $M_{i,j} \in \mathcal{M}^{\pm}(A)$. Es gebe eine *endliche* Teilmenge $\widetilde{I} \subseteq I$, so daß $M_{i,j} = \emptyset_A$ ist für alle $i \in I\backslash\widetilde{I}$, $j \in J$. (Wegen $M_{i,j} \neq \emptyset_A \Rightarrow i \in \widetilde{I}$ und weil $\widetilde{I}$ endlich ist, ist dann für jedes $j \in J$ die Familie $(M_{i,j})_{i\in I}$ offensichtlich addierbar.) Außerdem sei für jedes $i \in I$ die Familie $(M_{i,j})_{j\in J}$ addierbar. Dann sind auch die Familien

$$\Big(\sum_{j\in J} M_{i,j}\Big)_{i\in I}, \quad \Big(\sum_{i\in I} M_{i,j}\Big)_{j\in J} \quad \text{und} \quad (M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$$

addierbar, und es gilt

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} M_{i,j} = \sum_{i\in\widetilde{I}}\sum_{j\in J} M_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} M_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in\widetilde{I}} M_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} M_{i,j}.$$

Beweis. Für $a \in A$ sei

$$\mathfrak{K}_a := \big\{(i,j) \in I \times J \bigm| M_{i,j}(a) \neq 0\big\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_a &= \bigcup_{i\in I}\Big(\{i\} \times \big\{j \in J \bigm| M_{i,j}(a) \neq 0\big\}\Big)\\ &= \bigcup_{i\in\widetilde{I}}\Big(\{i\} \times \big\{j \in J \bigm| M_{i,j}(a) \neq 0\big\}\Big) \qquad (8.1)\end{aligned}$$

nach der Voraussetzung über $\widetilde{I}$. Bei (8.1) ist wegen der Endlichkeit von $\widetilde{I}$ und der Addierbarkeit jeder Familie $(M_{i,j})_{j\in J}$ klar, daß man es mit einer Vereinigung einer *endlichen* Anzahl *endlicher* Mengen zu tun hat: Deshalb ist auch $\mathfrak{K}_a$ endlich, d. h. $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ ist addierbar.

Wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{K}_a$ und

$$\mathfrak{K}_a = \bigcup_{j\in J}\Big(\big\{i \in I \bigm| M_{i,j}(a) \neq 0\big\} \times \{j\}\Big)$$

kann es nur endlich viele j geben, für die $\big\{i \in I \bigm| M_{i,j}(a) \neq 0\big\}$ nicht leer ist, und nur für diese kann $\Big(\sum_{i\in I} M_{i,j}\Big)(a) \neq 0$ sein; daraus folgt die Addierbarkeit von $\Big(\sum_{i\in I} M_{i,j}\Big)_{j\in J}$.

Wegen

$$i \in I\backslash\widetilde{I} \quad\Rightarrow\quad \sum_{j\in J} M_{i,j} = \emptyset_A$$

enthält die Familie $\left(\sum_{j\in J} M_{i,j}\right)_{i\in I}$ nur endlich viele von $\emptyset_A$ verschiedene Komponenten, also ist auch sie addierbar.

Daß bei Vorliegen der Addierbarkeit die im Lemma angegebenen Gleichungen Gültigkeit haben, ist (wegen $M_{i,j} = \emptyset_A$ für $i \in I\backslash\widetilde{I}$ und alle j) klar. □

Lemma 8.10. A_1, A_2, A_3 und C seien Mengen und

$$\psi\colon A_1 \times A_2 \times A_3 \to C$$

eine Abbildung. $M_1 \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_1)$ und $M_2 \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_2)$ seien endliche gewichtete Mengen und $M_3 \in \mathcal{M}^{\pm}(A_3)$ eine gewichtete Menge. Weiter seien B_{12} und B_{23} Mengen und

$$\begin{aligned} \upsilon_1\colon A_1 \times A_2 &\to B_{12}, & \varphi_1\colon B_{12} \times A_3 &\to C,\\ \upsilon_2\colon A_2 \times A_3 &\to B_{23}, & \varphi_2\colon A_1 \times B_{23} &\to C \end{aligned}$$

Abbildungen mit

$$\varphi_1(\upsilon_1(a_1, a_2), a_3) = \varphi_2(a_1, \upsilon_2(a_2, a_3)) = \psi(a_1, a_2, a_3) \tag{8.2}$$

für alle $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ und $a_3 \in A_3$. Dabei seien M_2 und M_3 miteinander verträglich bezüglich υ_2 (so daß $\upsilon_2(M_2, M_3) \in \mathcal{M}^{\pm}(B_{23})$ definiert ist), und M_1 sei verträglich mit $\upsilon_2(M_2, M_3)$ bezüglich φ_2. Außerdem sei (mindestens) eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es ist $M_3 \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_3)$.
- Für jedes Paar $(a_1, c) \in A_1 \times C$ mit $a_1 \in \operatorname{supp}(M_1)$ ist die Menge

  $$\{b_{23} \in B_{23} \mid \varphi_2(a_1, b_{23}) = c\}$$

  endlich.

Nach den Voraussetzungen sind (gemäß Bemerkung 5.19) M_1 und M_2 miteinander verträglich bezüglich υ_1 (mit $\upsilon_1(M_1, M_2) \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(U_{12})$). Außerdem gilt folgendes: $\upsilon_1(M_1, M_2)$ ist verträglich mit M_3 bezüglich φ_1, und es ist

$$\varphi_1(\upsilon_1(M_1, M_2), M_3) = \varphi_2(M_1, \upsilon_2(M_2, M_3)). \tag{8.3}$$

Beweis. Für den Fall $M_3 \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_3)$ folgt die Behauptung mit Bemerkung 5.18 direkt aus (8.2) auf Seite 73.

Im folgenden gehen wir vom anderen Fall aus:

$$\forall (a_1, c) \in \operatorname{supp}(M_1) \times C\colon \{b_{23} \in B_{23} \mid \varphi_2(a_1, b_{23}) = c\} \text{ ist endlich.} \tag{8.4}$$

Für diesen zeigen wir zunächst: Zu beliebig gewählten $a_1 \in \operatorname{supp}(M_1)$, $a_2 \in \operatorname{supp}(M_2)$, $c \in C$ ist die Menge

$$S_{a_1,a_2} := \{a_3 \in \operatorname{supp}(M_3) \mid \psi(a_1, a_2, a_3) = c\}$$

endlich.

Aus (8.4) folgt, daß die Menge

$$T_{a_1,a_2} := \{b_{23} \in B_{23} \mid \exists\, a_3 \in \operatorname{supp}(M_3)\colon b_{23} = \upsilon_2(a_2, a_3), \varphi_2(a_1, b_{23}) = c\}$$

endlich ist. Nun ist

$$T_{a_1,a_2} = \{\upsilon_2(a_2, a_3) \mid a_3 \in S_{a_1,a_2}\};$$

das heißt, falls nicht bereits S_{a_1,a_2} endlich ist, muß es ein $b_{23} \in T_{a_1,a_2} \subseteq B_{23}$ geben, für das die Menge

$$\{a_3 \in S_{a_1,a_2} \mid \upsilon_2(a_2, a_3) = b_{23}\}$$

unendlich ist. Das kann aber nicht sein, denn dann wäre (wegen $a_2 \in \operatorname{supp}(M_2)$ und $S_{a_1,a_2} \subseteq \operatorname{supp}(M_3)$) M_2 entgegen der Voraussetzung nicht verträglich mit M_3 bezüglich υ_2. Somit ist S_{a_1,a_2} in der Tat endlich.

Wir wollen jetzt nachweisen, daß $\upsilon_1(M_1, M_2)$ mit M_3 verträglich ist bezüglich φ_1. Dafür ist zu zeigen, daß für jedes $c \in C$ die Menge

$$\{(b_{12}, a_3) \in \operatorname{supp}(\upsilon_1(M_1, M_2)) \times \operatorname{supp}(M_3) \mid \varphi_1(b_{12}, a_3) = c\}$$

endlich ist. Weil $\varphi_1(M_1, M_2)$ eine endliche gewichtete Menge und somit der Träger $\operatorname{supp}(\varphi_1(M_1, M_2))$ eine endliche Menge ist, reicht es aus zu zeigen, daß für beliebiges $b_{12} \in \operatorname{supp}(\upsilon_1(M_1, M_2))$ die Menge

$$S_{b_{12}} := \{a_3 \in \operatorname{supp}(M_3) \mid \varphi_1(b_{12}, a_3) = c\}$$

endlich ist. Jedes solche b_{12} hat eine Darstellung $b_{12} = \upsilon_1(a_1, a_2)$ mit $a_1 \in \operatorname{supp}(M_1)$ und $a_2 \in \operatorname{supp}(M_2)$; für diese ist wegen $\varphi_1(b_{12}, a_3) = \psi(a_1, a_2, a_3)$ gerade $S_{b_{12}} = S_{a_1,a_2}$, und die Endlichkeit dieser Menge haben wir bereits bewiesen.

Zu zeigen bleibt noch (8.3) auf Seite 73. Dafür ist nachzuweisen, daß für jedes $c \in C$

$$\Big(\varphi_1\big(\upsilon_1(M_1, M_2), M_3\big)\Big)(c) = \Big(\varphi_2\big(M_1, \upsilon_2(M_2, M_3)\big)\Big)(c) \tag{8.5}$$

gilt. Zunächst stellen wir fest, daß die Menge

$$\{(a_1, a_2, a_3) \in \operatorname{supp}(M_1) \times \operatorname{supp}(M_2) \times \operatorname{supp}(M_3) \mid \psi(a_1, a_2, a_3) = c\}$$

endlich ist: Denn $\operatorname{supp}(M_1)$ und $\operatorname{supp}(M_2)$ sind endlich, und zu jedem der Paare $(a_1, a_2) \in \operatorname{supp}(M_1) \times \operatorname{supp}(M_2)$ ist – wie weiter oben gezeigt – die Menge $S_{a_1,a_2} = \{a_3 \in \operatorname{supp}(M_3) \mid \psi(a_1, a_2, a_3) = c\}$ endlich. Somit ist die Summe

$$\sum_{\substack{(a_1,a_2,a_3) \in \operatorname{supp}(M_1) \times \operatorname{supp}(M_2) \times \operatorname{supp}(M_3) \\ \psi(a_1,a_2,a_3)=c}} M_1(a_1) \cdot M_2(a_2) \cdot M_3(a_3)$$

definiert. Anhand Definition 5.14 erhält man, daß diese Summe gleich

$$\Big(\varphi_1\big(\upsilon_1(M_1, M_2), M_3\big)\Big)(c)$$

sowie gleich

$$\Big(\varphi_2\big(M_1, \upsilon_2(M_2, M_3)\big)\Big)(c)$$

ist. Zusammen ergibt sich (8.5). □

Lemma 8.11. A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 seien Mengen und

$$\begin{aligned} f_1\colon A_1 \times B_1 &\to C_1, \\ f_2\colon A_2 \times B_2 &\to C_2, \\ g\colon A_1 &\to A_2, \\ h\colon B_1 &\to B_2, \\ i\colon C_1 &\to C_2 \end{aligned}$$

seien Abbildungen, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times B_1 & \xrightarrow{f_1} & C_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle g\times h} & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ A_2 \times B_2 & \xrightarrow[f_2]{} & C_2 \end{array}$$

kommutativ ist (d. h. für $(a_1, b_1) \in A_1 \times B_1$ gilt $i\big(f_1(a_1, b_1)\big) = f_2\big(g(a_1), h(b_1)\big)$. Dann ist (für die durch f_1, f_2, g, h und i gemäß Definition 5.14 und Bemerkung 5.19 bzw. gemäß Definition 5.9 und Bemerkung 5.10 induzierten Abbildungen) auch das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_1) \times \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B_1) & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_1) \\ \big\downarrow{\scriptstyle g\times h} & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_2) \times \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B_2) & \xrightarrow[f_2]{} & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_2) \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen ist, daß

$$i\big(f_1(M_1, N_1)\big) = f_2\big(g(M_1), h(N_1)\big)$$

für alle $(M_1, N_1) \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_1) \times \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B_1)$ gilt. Für den Fall $(M_1, N_1) = \big(\{a_1\}, \{b_1\}\big)$ mit $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B_1$ folgt das direkt aus der Voraussetzung. Der allgemeine Fall folgt durch Induktion mit Bemerkungen 5.18 und 5.23. □

Eine direkte Folgerung hieraus ist das folgende Lemma:

Lemma 8.12. C_1, C_2 seien Mengen, $i\colon C_1 \to C_2$ eine Abbildung, J eine endliche Menge, und für jedes $j \in J$ seien $A_{1,j}$, $A_{2,j}$, $B_{1,j}$, $B_{2,j}$ Mengen und

$$\begin{aligned} f_{1,j}\colon A_{1,j} \times B_{1,j} &\to C_1, \\ f_{2,j}\colon A_{2,j} \times B_{2,j} &\to C_2, \\ g_j\colon A_{1,j} &\to A_{2,j}, \\ h_j\colon B_{1,j} &\to B_{2,j} \end{aligned}$$

Abbildungen, für die (wie bei Lemma8.11) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{1,j} \times B_{1,j} & \xrightarrow{f_{1,j}} & C_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle g_j\times h_j} & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\ A_{2,j} \times B_{2,j} & \xrightarrow[f_{2,j}]{} & C_2 \end{array}$$

kommutativ ist. Aus den gemäß Lemma 8.11 für jedes j erhaltenen kommutativen Diagrammen ergibt sich, daß auch das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
\prod\limits_{j\in J}\Big(\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_{1,j})\times\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B_{1,j})\Big) & \xrightarrow{\prod\limits_{j\in J} f_{1,j}} & \prod\limits_{j\in J}\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\prod\limits_{j\in J}(g_j\times h_j)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\prod\limits_{j\in J} i} \\
\prod\limits_{j\in J}\Big(\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_{2,j})\times\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B_{2,j})\Big) & \xrightarrow[\prod\limits_{j\in J} f_{2,j}]{} & \prod\limits_{j\in J}\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_2)
\end{array}$$

Außerdem ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\prod\limits_{j\in J}\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_1) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\prod\limits_{j\in J} i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} \\
\prod\limits_{j\in J}\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_2) & \xrightarrow[\Sigma]{} & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_2)
\end{array}$$

kommutativ, wobei für $k \in \{1,2\}$

$$\Sigma\colon \prod_{j\in J}\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_k)\to\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_k)$$

die Abbildung ist, die Familien von gewichteten Mengen mit der endlichen Indexmenge J aufaddiert (d. h. für $\gamma\in\prod_{j\in J}\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_k)$, also $\gamma(j)\in\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_k)$ für $j\in J$, ist $\Sigma(\gamma)=\sum_{j\in J}\gamma(j)$). Diese beiden Diagramme kann man zusammensetzen, wodurch man folgendes kommutative Diagramm erhält:

$$\begin{array}{ccc}
\prod\limits_{j\in J}\Big(\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_{1,j})\times\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B_{1,j})\Big) & \xrightarrow{\Sigma\circ\left(\prod\limits_{j\in J} f_{1,j}\right)} & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\prod\limits_{j\in J}(g_j\times h_j)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i} \\
\prod\limits_{j\in J}\Big(\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(A_{2,j})\times\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(B_{2,j})\Big) & \xrightarrow[\Sigma\circ\left(\prod\limits_{j\in J} f_{2,j}\right)]{} & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(C_2)
\end{array}$$

Jetzt zeigen wir, wie in einem Modell der Endlichkeitsspezifikation eines algebraischen Netzes aus einer linearen Invarianten, also aus einer Familie von gewichteten Mengen von *Termen,* eine Familie von gewichteten Mengen von *Abbildungen* gewonnen werden kann. Von letzterer gelangen wir dann zu einer *Äquivalenzrelation* auf der Menge der Markierungen des interpretierten Netzes und weisen nach, daß es sich dabei um eine Invariante gemäß der Definition 6.15 handelt.

Bemerkung 8.13. Sei ein Modell

$$A=((A_s)_{s\in S},(f_\omega)_{\omega\in\Omega})$$

der Endlichkeitsspezifikation $(S,\Omega,\Xi,G,\mathcal{T}^{\text{fin}})$ gegeben (siehe Definition 4.3). Gemäß Definition 1.22 hat man Abbildungen

$$\text{interpret}_A\colon \mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\})\to\text{Abb}(A_s,A_{\widetilde{s}}),$$

wobei hier Belegungen $\alpha\colon \{y_s\} \to A_s$ mit den jeweiligen Elementen von A_s identifiziert werden. Für die mit $\mathrm{interpret}_A$ auswertungsverträglichen (Definition 5.9) gewichteten Mengen erhält man hieraus Abbildungen

$$\mathrm{interpret}_A\colon \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{interpret}_A}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\})) \to \mathcal{M}^{\pm}(\mathrm{Abb}(A_s, A_{\widetilde{s}})).$$

Bemerkung 8.14. Nach Bemerkung 5.10 ist

$$\mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\})) \subseteq \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{interpret}_A}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_s\})),$$

und wegen

$$i_p \in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}\Big(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})\Big)$$

ist somit für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ die gewichtete Menge

$$\mathrm{interpret}_A(i_p) \in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}}))$$

definiert.

Bemerkung 8.15. i sei E_{CN}-zulässig. Nach Definition 8.6 sind dann für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ alle Elemente T von i_p Endlichkeitsterme für A, d. h. für jedes $\widetilde{a} \in A_{\widetilde{s}}$ ist die Menge der Belegungen $\alpha\colon \{y_{s_p}\} \to A$ mit $\overline{\alpha}_{\widetilde{s}}(T) = \widetilde{a}$ endlich; in der Sprache von Bemerkung 8.13 heißt das, die Menge

$$\{a \in A_{s_p} \mid \mathrm{interpret}_A(T)(a) = \widetilde{a}\}$$

ist endlich.

Definition 8.16. *Sei*

$$AN = \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}}), (s_p)_{\boldsymbol{P}}, (X_t)_{\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

ein algebraisches Netz. Zu diesem Netz sei i eine lineare Invariante für E_{CN}, für $E^{\text{l-fin}}_{CN}$ oder für E^{fin}_{CN}. Weiter sei ein Modell $A = \big((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega}\big)$ der Endlichkeitsspezifikation $(S, \Omega, \Xi, G, \mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ gegeben, durch das AN interpretierbar (Definition 7.2) ist. Nun sei die Familie

$$\iota := (\iota_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$$

definiert durch

$$\iota_p := \mathrm{interpret}_A(i_p)$$

für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ (so daß $\iota_p \in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}}))$ ist, siehe Bemerkung 8.14). Weiter werde für Markierungen der Interpretation

$$CN := \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, (A_{s_p})_{p\in\boldsymbol{P}}, (B_t)_{t\in\boldsymbol{T}}, (F_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

von AN (mit B_t und $F_{p,t}$ wie in Definition 7.2) die Relation $\sim_\iota \subseteq M_{CN} \times M_{CN}$ dadurch definiert, daß

$$m \sim_\iota m'$$

für $m, m' \in M_{CN}$ (mit $m = (m_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$ und $m' = (m'_p)_{p\in\boldsymbol{P}}$) genau dann gelten soll, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind (von denen die zweite und dritte auf der jeweils vorhergehenden aufbauen):

(i) *Für jedes $p \in \boldsymbol{P}$ ist die gewichtete Menge $m'_p - m_p$ auswertungsverträglich mit ι_p.*

(ii) *Die Familie $\big(\iota_p(m'_p - m_p)\big)_{p \in \boldsymbol{P}}$ ist addierbar.*

(iii) *Es ist*
$$\sum_{p \in \boldsymbol{P}} \iota_p(m'_p - m_p) = \emptyset_{A_{\widetilde{s}}}.$$

Bemerkung 8.17. Die Relation $\sim_\iota$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind ohne weiteres anhand der Definitionen für Auswertungsverträglichkeit (Definition 5.9) und für Addierbarkeit und Summenbildung (Definition 5.7) nachzuvollziehen. □

Bemerkung 8.18. i sei E_{CN}-zulässig. Für jedes Element f von ι_p ($p \in \boldsymbol{P}$ beliebig) und jedes $\widetilde{a} \in A_{\widetilde{s}}$ ist dann die Menge
$$\{a \in A_{s_p} \mid f(a) = \widetilde{a}\}$$
endlich. Das folgt direkt aus Bemerkung 8.15, denn jedes Element von ι_p hat eine Darstellung $\mathrm{interpret}_A(T)$, wobei T ein Element von i_p ist.

Bemerkung 8.19. Sei $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{p,t})_{(p,t) \in \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}}$ die Inzidenzmatrix von AN. Für das in Definition 8.16 angegebene gefärbte Netz CN gilt wegen $F_{x,y} = \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{F}_{x,y})$ (Definition 7.2) und $-\mathfrak{F}_{p,t} + \mathfrak{F}_{t,p} = \mathfrak{D}_{p,t}$ (Definition 8.1) nach Bemerkung 5.23 die Gleichung
$$-F_{p,t} + F_{t,p} = \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t}).$$

Satz 8.20. *Es liege die Situation von Definition 8.16 vor. Sind $m, m' \in M_{CN}$ gegeben mit $m \rightarrow_E m'$ (siehe Definition 6.8), so gilt $m \sim_\iota m'$.*

Beweis. Es sind nacheinander die Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Definition 8.16 zu prüfen. Zunächst bemerken wir, daß für jedes $p \in \boldsymbol{P}$
$$m'_p - m_p = -\sum_{t \in \boldsymbol{T}} F_{p,t}(e_t) + \sum_{t \in \boldsymbol{T}} F_{t,p}(e_t) \tag{8.6}$$
ist mit einem $e = (e_t)_{t \in \boldsymbol{T}} \in E_{CN}$ (siehe Definitionen 6.7 und 6.8). Wenn $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{p,t})_{(p,t) \in \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{T}}$ die Inzidenzmatrix von AN bezeichnet, folgt daraus
$$\begin{aligned} m'_p - m_p &= \sum_{t \in \boldsymbol{T}} \big(- F_{p,t}(e_t) + F_{t,p}(e_t) \big) \\ &= \sum_{t \in \boldsymbol{T}} \big(- F_{p,t} + F_{t,p} \big)(e_t) \\ &= \sum_{t \in \boldsymbol{T}} \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t) \end{aligned} \tag{8.7}$$
gemäß (in dieser Reihenfolge verwendet) Bemerkung 5.8, Bemerkung 5.20 und Bemerkung 8.19.

Zu (i) aus Definition 8.16: Wegen Bemerkung 8.18 ist jede gewichtete Menge über A_{s_p} auswertungsverträglich mit jedem Element von ι_p. Weil ι_p außerdem eine *endliche* gewichtete Menge ist, ist gemäß Bemerkung5.13 jede gewichtete Menge über A_{s_p} auswertungsverträglich mit ι_p.

Zu (ii) aus Definition 8.16: Weil i E_{CN}-zulässig ist (Definition 8.6), gibt es nur endlich viele $p \in \boldsymbol{P}$ mit $i_p \neq \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$. Für $p \in \boldsymbol{P}$ mit $i_p = \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$ ist auch ι_p leer und gilt somit $\iota_p(m'_p - m_p) = \emptyset_{A_{\widetilde{s}}}$. Also hat die Familie $\big(\iota_p(m'_p - m_p)\big)_{p\in\boldsymbol{P}}$ nur endlich viele von $\emptyset_{A_{\widetilde{s}}}$ verschiedene Komponenten und ist folglich addierbar.

Zu (iii) aus Definition 8.16:

Sei zunächst $p \in \boldsymbol{P}$ vorgegeben mit $i_p \neq \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$. Dann gibt es infolge von (ii) aus Definition 8.6 eine endliche Menge $\widetilde{\boldsymbol{T}}_p \subseteq \boldsymbol{T}$ mit $\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t) = \emptyset_{A_{s_p}}$ für $t \in \boldsymbol{T}\backslash\widetilde{\boldsymbol{T}}_p$. Nach dem bereits geführten Beweis von (i) aus Definition 8.16, angewandt auf einen Teilschritt von e gemäß Bemerkung 6.6, ist $\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)$ auswertungsverträglich mit ι_p. Da $\widetilde{\boldsymbol{T}}_p$ endlich ist, sind die beiden Familien

$$\big(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\big)_{t\in\widetilde{\boldsymbol{T}}_p} \quad \text{und} \quad \Big(\iota_p\big(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\big)\Big)_{t\in\widetilde{\boldsymbol{T}}_p}$$

addierbar mit

$$\iota_p\Big(\sum_{t\in\widetilde{\boldsymbol{T}}_p} \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\Big) = \sum_{t\in\widetilde{\boldsymbol{T}}_p} \iota_p\big(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\big)$$

(laut Bemerkung 5.20). Da für $t \in \boldsymbol{T}\backslash\widetilde{\boldsymbol{T}}_p$ ohnehin $\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t) = \emptyset_{A_{s_p}}$ und also auch $\iota_p\big(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t) = \emptyset_{A_{\widetilde{s}}}\big)$ gilt, kann man die Summierungen auf die gesamte Menge $\boldsymbol{T}$ ausdehnen:

$$\iota_p\Big(\sum_{t\in\boldsymbol{T}} \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\Big) = \sum_{t\in\boldsymbol{T}} \iota_p\big(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\big).$$

Diese Gleichung gilt sogar für jedes $p \in \boldsymbol{P}$, denn bei $i_p = \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$ ist $\iota_p = \emptyset_{\mathrm{Abb}(A_{s_p},A_{\widetilde{s}})}$, und die Gleichung ist dann trivialerweise erfüllt. Mit (8.7) folgt für beliebiges $p \in \boldsymbol{P}$

$$\iota_p(m'_p - m_p) = \sum_{t\in\boldsymbol{T}} \iota_p\big(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\big),$$

und also ergibt sich (wegen der bereits bewiesenen Addierbarkeit – (ii) aus Definition 8.16)

$$\sum_{p\in\boldsymbol{P}} \iota_p(m'_p - m_p) = \sum_{p\in\boldsymbol{P}} \sum_{t\in\boldsymbol{T}} \iota_p\big(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)\big).$$

Hierbei liegen die Voraussetzungen zur Anwendung von Lemma 8.9 vor: $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ bestehe aus den endlich vielen p mit $i_p \neq \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$ (siehe (i) in Definition 8.6); darunter sind zwangsläufig alle p mit $\iota_p \neq \emptyset_{\mathrm{Abb}(A_{s_p},A_{\widetilde{s}})}$. Gemäß

Lemma 8.9 erhält man nun

$$\sum_{p\in\boldsymbol{P}} \iota_p(m'_p - m_p) = \sum_{t\in\boldsymbol{T}} \sum_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}} \iota_p(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)).$$

Zum Nachweis von

$$\sum_{p\in\boldsymbol{P}} \iota_p(m'_p - m_p) = \emptyset_{A_{\widetilde{s}}}$$

reicht es deshalb aus zu zeigen, daß für jedes $t \in \boldsymbol{T}$

$$\sum_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}} \iota_p(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)) = \emptyset_{A_{\widetilde{s}}} \tag{8.8}$$

ist.

Wir wollen zunächst zeigen, daß für $p \in \widetilde{\boldsymbol{P}}$

$$\iota_p(\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})(e_t)) = (\iota_p \circ \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t}))(e_t) \tag{8.9}$$

ist. Falls $\mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})$ leer ist, gilt dies trivialerweise. Andernfalls kommt Lemma 8.10 zum Einsatz: Für $p \in \widetilde{\boldsymbol{P}}$ ist

$$\begin{aligned} \iota_p &\in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}})),\\ \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t}) &\in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p})) \end{aligned}$$

(letzteres gilt nach Wahl von $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ und wegen (iii) in Definition 8.6). Die Abbildung

$$\psi_{p,t} \colon \mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}}) \times \mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p}) \times B_t \to A_{\widetilde{s}}$$

sei definiert durch

$$\psi_{p,t}(g, f, a) := g(f(a)).$$

Im folgenden Teil des Beweises werden p und t nicht variiert, deshalb können wir zur Vereinfachung der Notation $\psi := \psi_{p,t}$ setzen. Die Abbildungen $\upsilon_1, \varphi_1, \upsilon_2, \varphi_2$ in Lemma 8.10 wählen wir in natürlicher Weise wie folgt:

$$\begin{aligned} \upsilon_1 &:= ((g, f) \mapsto g \circ f) \colon \mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}}) \times \mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p}) \to \mathrm{Abb}(B_t, A_{\widetilde{s}}),\\ \varphi_1 &:= ((f, a) \mapsto f(a)) \colon \mathrm{Abb}(B_t, A_{\widetilde{s}}) \times B_t \to A_{\widetilde{s}},\\ \upsilon_2 &:= ((f, a) \mapsto f(a)) \colon \mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p}) \times B_t \to A_{s_p},\\ \varphi_2 &:= ((f, a) \mapsto f(a)) \colon \mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}}) \times A_{s_p} \to A_{\widetilde{s}}. \end{aligned}$$

Damit gilt, wie bei Lemma 8.10 gefordert,

$$\varphi_1(\upsilon_1(g, f), a) = \varphi_2(g, \upsilon_2(f, a)) = \psi(g, f, a)$$

für $g \in \mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}})$, $f \in \mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p})$ und $a \in B_t$. Die weitere Voraussetzung von Lemma 8.10 liest sich hier wie folgt:

- e_t ist endlich, oder

- für jedes $f \in \mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}})$ mit $f \in \mathrm{supp}(\iota_p)$ und jedes $\widetilde{a} \in A_{\widetilde{s}}$ ist die Menge
$$\{a \in A_{s_p} \mid f(a) = \widetilde{a}\}$$
endlich.

Für $f \in \mathrm{supp}(\iota_p)$ und $\widetilde{a} \in A_{\widetilde{s}}$ ist nach Bemerkung 8.18 die Menge

$$\{a \in A_{s_p} \mid f(a) = \widetilde{a}\}$$

endlich, also liegen die Voraussetzungen von Lemma 8.10 vor. Gemäß Lemma 8.10 folgt jetzt, daß die Gleichung (8.9) in der Tat gilt.

Mit (8.9) kann die linke Seite der Gleichung (8.8) auch als

$$\sum_{p \in \widetilde{\boldsymbol{P}}} \big(\iota_p \circ \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})\big)(e_t)$$

geschrieben werden. Wegen der Endlichkeit von $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ und nach Bemerkung 5.20 ist die eben angegebene Summe gleich

$$\Bigg(\sum_{p \in \widetilde{\boldsymbol{P}}} \iota_p \circ \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t})\Bigg)(e_t).$$

Somit reicht es zum Nachweis von (8.8) aus, folgende Gleichung zu beweisen, in der e_t nicht mehr vorkommt:

$$\sum_{p \in \widetilde{\boldsymbol{P}}_t} \iota_p \circ \mathrm{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t}) = \emptyset_{\mathrm{Abb}(B_t, A_{\widetilde{s}})} \tag{8.10}$$

Wir hatten $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ so gewählt, daß für $p \in \boldsymbol{P} \backslash \widetilde{\boldsymbol{P}}$ notwendig $i_p = \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})}$ ist. Für solche p ist $i_p \xleftarrow[Y]{} \mathfrak{D}_{p,t} = \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t)}$, und aus

$$\sum_{p \in \boldsymbol{P}} i_p \xleftarrow[Y]{} \mathfrak{D}_{p,t} \equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(X_t)}_{G,\widetilde{s}} \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t)}$$

(gemäß Definition 8.5 und Definition 8.8) folgt demnach

$$\sum_{p \in \widetilde{\boldsymbol{P}}} i_p \xleftarrow[Y]{} \mathfrak{D}_{p,t} \equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(X_t)}_{G,\widetilde{s}} \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(X_t)}. \tag{8.11}$$

Laut Satz 8.4 ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\}) \times \mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t) \arrow[r, "{(T,U) \mapsto [T \xleftarrow[Y]{} U]}"] \arrow[d, "\mathrm{interpret}_A \times \mathrm{interpret}_A"] & \mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X_t) \arrow[d, "\mathrm{interpret}_A"] \\
\mathrm{Abb}(A_{s_p}, A_{\widetilde{s}}) \times \mathrm{Abb}(B_t, A_{s_p}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Abb}(B_t, A_{\widetilde{s}})
\end{tikzcd}$$

für jedes s_p kommutativ. Nach Lemma 8.12 ist somit auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}} \Big(\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}\big(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})\big) \times \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}\big(\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t)\big)\Big) \arrow[r, "\Sigma\circ\left(\prod\limits_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}}(T,U)\mapsto\left[T\underset{Y}{\longleftarrow}U\right]\right)"] \arrow[d, "\prod\limits_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}}(\text{interpret}_A\times\text{interpret}_A)"] & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}\big(\mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X_t)\big) \arrow[d, "\text{interpret}_A"] \\
\prod\limits_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}} \Big(\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}\big(\text{Abb}(A_{s_p},A_{\widetilde{s}})\big) \times \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}\big(\text{Abb}(B_t,A_{s_p})\big)\Big) \arrow[r, "\Sigma\circ\left(\prod\limits_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}}\circ\right)"'] & \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}\big(\text{Abb}(B_t,A_{\widetilde{s}})\big)
\end{tikzcd}$$

kommutativ, denn $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ ist eine endliche Menge. Durch dieses Diagramm verfolgt man nun, was mit

$$(i_p,\mathfrak{D}_{p,t})_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}} \in \prod_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}} \Big(\mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{\Omega,\widetilde{s}}(\{y_{s_p}\})) \times \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{\Omega,s_p}(X_t))\Big)$$

geschieht. (Daß die gewichtete Menge $\mathfrak{D}_{p,t}$ für $p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}$ in der Tat endlich ist, folgt nach Wahl von $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ aus (ii) und (iii) in Definition 8.6.) Beim oberen Pfeil gelangt man zu

$$\Sigma\Big(([i_p \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D}_{p,t}])_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}}\Big) = \sum_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}} [i_p \underset{Y}{\longleftarrow} \mathfrak{D}_{p,t}] = \emptyset_{\mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X_t)}$$

laut (8.11), und wegen $\text{interpret}_A(\emptyset_{\mathfrak{T}_{SPEC,\widetilde{s}}(X_t)}) = \emptyset_{\text{Abb}(B_t,A_{\widetilde{s}})}$ (rechter Pfeil) ist gemäß der Kommutativität des Diagramms auch

$$\Sigma\Big((\text{interpret}_A(i_p)\circ\text{interpret}_A(\mathfrak{D}_{p,t}))_{p\in\widetilde{\boldsymbol{P}}}\Big) = \emptyset_{\text{Abb}(B_t,A_{\widetilde{s}})}$$

(linker und unterer Pfeil). Das ist gerade die zu zeigende Gleichung (8.10). □

Corollar 8.21. *In der Situation von Definition 8.16 gilt*

$$\sim_{E_{CN}} \subseteq \sim_\iota$$

(mit $\sim_E$ gemäß Bemerkung 6.19), das heißt, $(\sim_\iota, M_{CN})$ ist dann eine Invariante *(der (CN, M_0)-Netzsysteme mit beliebigem $M_0 \subseteq M_{CN}$) bezüglich E_{CN} entsprechend Definition 6.15.*

Beweis. Es seien $m, m' \in M_{CN}$ gegeben mit $m \sim_{E_{CN}} m'$. Dann gilt auch $m \sim_\iota m'$; das folgt wegen Bemerkung 8.17 und Satz 8.20 direkt aus der Definition von $\sim_{E_{CN}}$. □

Corollar 8.22. *Speziell folgt somit: Ist $m_0 \in M_{CN}$ und sind $m, m' \in [m_0\rangle$, so gilt $m \sim_\iota m'$.*

Beispiel 8.23. Seien

$$AN_1 = \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, SPECF_1, (s_p)_{p\in\boldsymbol{P}}, (X_t)_{t\in\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

und

$$AN_2 = \big(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T}, SPECF_2, (s_p)_{p\in\boldsymbol{P}}, (X_t)_{t\in\boldsymbol{T}}, (\mathfrak{F}_{x,y})_{(x,y)\in(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{T})\cup(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{P})}\big)$$

die algebraischen Netze aus Beispiel 7.3.

Die Inzidenzmatrix (Definition 8.1) gleichermaßen von AN_1 und von AN_2 ist

$$\mathfrak{D} := (\mathfrak{D}_{p,t})_{(p,t)\in\{p\}\times\{t_1,t_2\}}$$

mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{p,t_1} &:= \{\!\{x_1, x_1 +_1 1_1\}\!\},\\ \mathfrak{D}_{p,t_2} &:= -\{\!\{x_1, x_1 +_1 1_1\}\!\};\end{aligned}$$

optisch als Matrix mit in diesem Fall nur einer Zeile angeordnet also

$$\mathfrak{D} = \Big(\{\!\{x_1, x_1 +_1 1_1\}\!\} \qquad -\{\!\{x_1, x_1 +_1 1_1\}\!\}\Big).$$

Sei $y \in \Xi_{s_1}$ eine beliebige Variable der Sorte s_1 und $Y := \{y\} \subseteq \Xi$ das nur aus dieser Variable bestehende Variablensystem. Nun sei $i := (i_p)_{p\in\{p\}}$ definiert durch

$$i_p := \{\!\{\varphi(y)\}\!\} - \{\!\{\varphi(y +_1 1_1)\}\!\} \quad \in \mathcal{M}^{\pm}_{\text{fin}}(\mathfrak{T}_{\Omega,s_2}(\{y\})).$$

i ist (gleichermaßen für AN_1 wie für AN_2) eine algebraische Gewichtung der Sorte s_2 gemäß Definition 8.2. Weil die Menge $\boldsymbol{P}$ und die Multimengen i_p, $\mathfrak{D}_{p,t_1}$ und $\mathfrak{D}_{p,t_2}$ endlich sind, ist die Gewichtung i zulässig (Definition 8.5), so daß das Matrixprodukt $i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D}$ definiert ist:

$$i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D} = \big((i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_t\big)_{t\in\{t_1,t_2\}}$$

mit

$$\begin{aligned}(i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_1} &= i_p \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D}_{p,t_1}\\ &= \big(\{\!\{\varphi(y)\}\!\} - \{\!\{\varphi(y +_1 1_1)\}\!\}\big) \underset{Y}{\leftarrow} \big(\{\!\{x_1\}\!\} + \{\!\{x_1 +_1 1_1\}\!\}\big)\\ &= \Big\{\!\!\Big\{\varphi(y) \underset{Y}{\leftarrow} x_1\Big\}\!\!\Big\} + \Big\{\!\!\Big\{\varphi(y) \underset{Y}{\leftarrow} x_1 +_1 1_1\Big\}\!\!\Big\}\\ &\qquad - \Big\{\!\!\Big\{\varphi(y +_1 1_1) \underset{Y}{\leftarrow} x_1\Big\}\!\!\Big\} - \Big\{\!\!\Big\{\varphi(y +_1 1_1) \underset{Y}{\leftarrow} x_1 +_1 1_1\Big\}\!\!\Big\}\\ &= \{\!\{\varphi(x_1)\}\!\} + \underbrace{\{\!\{\varphi(x_1 +_1 1_1)\}\!\} - \{\!\{\varphi(x_1 +_1 1_1)\}\!\}}_{=\emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,s_2}(\{x_1\})}}\\ &\qquad - \big\{\!\!\big\{\varphi\big((x_1 +_1 1_1) +_1 1_1\big)\big\}\!\!\big\}\\ &= \{\!\{\varphi(x_1)\}\!\} - \big\{\!\!\big\{\varphi\big((x_1 +_1 1_1) +_1 1_1\big)\big\}\!\!\big\}\end{aligned}$$

und (wegen $\mathfrak{D}_{p,t_2} = -\mathfrak{D}_{p,t_1}$)

$$\begin{aligned}(i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_2} &= -(i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_1} \\ &= \{\!\!\{\varphi((x_1 +_1 1_1) +_1 1_1)\}\!\!\} - \{\!\!\{\varphi(x_1)\}\!\!\}.\end{aligned}$$

Nun ist die Bedingung aus Definition 8.6 zu prüfen: i ist E_{CN}-zulässig im Falle des Netzes AN_1; insbesondere ist dann nämlich

$$i_p \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}_{SPEC}}(\mathcal{T}^{\mathrm{fin}}))$$

laut Beispiel 4.8. Betrachtet man jedoch AN_2, so ist i nicht E_{CN}-zulässig wegen

$$i_p \notin \mathcal{M}^{\pm}(\mathrm{cl}_{\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}_{SPEC}}(\mathcal{T}^{\mathrm{fin}}));$$

denn wie man sich anhand der Fälle mit $n_1 = 0$ in Beispiel 2.21 klarmacht, ist $\varphi(y)$ nicht für jede $SPECF_2$-Algebra ein Endlichkeitsterm und kann somit aufgrund der Korrektheit des Regelsystems nicht in $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}_{SPEC}}(\mathcal{T}^{\mathrm{fin}})$ liegen, es dürfte also nicht in i_p vorkommen.

Jetzt soll gezeigt werden, daß i eine lineare Invariante für E_{CN} ist, sofern i E_{CN}-zulässig ist; d. h. im Fall von AN_1. Zu prüfen sind nach dem Vorhergehenden nur noch folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}(i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_1} &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\{x_1\})}_{G,s_2} \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,s_2}(X_t)}, \\ (i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_2} &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\{x_1\})}_{G,s_2} \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,s_2}(X_t)}.\end{aligned}$$

Wegen $(i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_2} = -(i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_1}$ reicht es hierbei aus, nur eine dieser Kongruenzen nachzuweisen. Um das zu tun, stellen wir zunächst fest:

$$\begin{aligned}\varphi(1_1 +_1 1_1) &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\emptyset)}_{G,s_2} \varphi(1_1) +_1 \varphi(1_1) \\ &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\emptyset)}_{G,s_2} 0_2, \\ (x_1 +_1 1_1) +_1 1_1 &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\{x_1\})}_{G,s_1} x_1 +_1 (1_1 +_1 1_1), \\ \varphi((x_1 +_1 1_1) +_1 1_1) &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\{x_1\})}_{G,s_2} \varphi(x_1) +_2 \varphi(1_1 +_1 1_1) \\ &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\{x_1\})}_{G,s_2} \varphi(x_1);\end{aligned}$$

alle diese Kongruenzen sind leicht anhand der Schlußregeln aus Definition 2.11 und der Gleichungsmenge G aus Beispiel 2.21 zu zeigen. Damit sehen wir für die bereits weiter oben ausgerechnete Darstellung von $(i \underset{Y}{\leftarrow} \mathfrak{D})_{t_1}$ folgendes:

$$\begin{aligned}\{\!\!\{\varphi(x_1)\}\!\!\} - \{\!\!\{\varphi((x_1 +_1 1_1) +_1 1_1)\}\!\!\} &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\{x_1\})}_{G,s_2} \{\!\!\{\varphi(x_1)\}\!\!\} - \{\!\!\{\varphi(x_1)\}\!\!\} \\ &\equiv^{\mathfrak{T}_\Sigma(\{x_1\})}_{G,s_2} \emptyset_{\mathfrak{T}_{\Omega,s_2}(X_t)}.\end{aligned}$$

Also hat i tatsächlich die geforderte Eigenschaft und ist eine lineare Invariante.

Nun wollen wir Corollar 8.21 anwenden und Interpretationen der linearen Invarianten i angeben. Das Ziel dabei ist es, so zu einem Nachweis für die in Beispiel 6.20 für bestimmte G vermuteten Invarianten der dort behandelten gefärbten Netze CN_G aus Beispiel 6.2 zu gelangen. In Beispiel 7.3 wurden einige Algebren angegeben, durch die AN_2 und in vielen Fällen auch AN_2 interpretierbar ist: Sei

$$A := \big((A_s)_{s\in S}, (f_\omega)_{\omega\in\Omega}\big)$$

mit

$$A_{s_1} := {}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\,\mathbb{Z}}, \qquad A_{s_2} := {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\,\mathbb{Z}}, \qquad f_\varphi(x) := \overline{x}$$

mit einer geraden Zahl $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, wobei die übrigen Operationen f_{+_1}, f_{+_2}, f_{-_1}, f_{-_2} und die Konstanten f_{0_1}, f_{1_1}, f_{0_2} in natürlicher Weise (vgl. Beispiel 2.21) definiert seien und $\overline{x} = 0 + 2\,\mathbb{Z} = f_{0_2}$ für gerades x, $\overline{x} = 1 + 2\,\mathbb{Z} \neq f_{0_2}$ für ungerades x sei. Für solche Algebren hatten wir gesehen: A ist eine *SPEC*-Algebra, und AN_2 ist in jedem Fall durch A interpretierbar; aber nur bei $n \neq 0$ ist A auch eine *SPECF*-Algebra, so daß AN_1 durch A interpretierbar ist.

Die Familie $\iota := (\iota_p)_{p\in\{p\}}$ aus Definition 8.16 hat hier die (einzige) Komponente

$$\iota_p := \mathrm{interpret}_A(i_p) = \mathrm{interpret}_A\big(\{\!\!\{\varphi(y)\}\!\!\} - \{\!\!\{\varphi(y +_1 1_1)\}\!\!\}\big).$$

Bei den oben angegebenen Algebren ist

$$\iota_p = \{\!\!\{(x \mapsto \overline{x})\}\!\!\} - \{\!\!\{(x \mapsto \overline{x+1})\}\!\!\},$$

d. h. mit $G := A_{s_1}$ ist für $\Delta \in \mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(G)$

$$\begin{aligned} \iota_p(\Delta) = {} & \sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ gerade}}} \Delta(g)\cdot\overline{0} + \sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ ungerade}}} \Delta(g)\cdot\overline{1} \\ & - \sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ gerade}}} \Delta(g)\cdot\overline{1} - \sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ ungerade}}} \Delta(g)\cdot\overline{0} \end{aligned} \tag{8.12}$$

(wegen $\overline{x+1} = \overline{1}$ für gerades, $\overline{x+1} = \overline{0}$ für ungerades x). Es gilt

$$\iota_p(\Delta) = \emptyset_{\left({}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\,\mathbb{Z}}\right)}$$

genau dann, wenn

$$\big(\iota_p(\Delta)\big)(\overline{0}) = 0 \quad \text{und} \quad \big(\iota_p(\Delta)\big)(\overline{1}) = 0$$

ist; diese beiden Einzelbedingungen sind wegen (8.12) und $\overline{0} \neq \overline{1}$ gleichwertig zueinander und zu

$$0 = \sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ gerade}}} \Delta(g) - \sum_{\substack{g\in G\\ g \text{ ungerade}}} \Delta(g).$$

Legt man $\sim_\iota$ gemäß Definition 8.16 fest, so ergibt sich für $m = (m_p)_{p\in\{p\}}$, $m' = (m'_p)_{p\in\{p\}} \in M_{CN_G}$ mit endlicher Differenz $m'_p - m_p$ (=: Δ) also genau das gleiche wie für die in Beispiel 6.20 angegebene Relation $\sim$.

Wir hatten für den Fall von AN_1 gesehen, daß i eine lineare Invariante für E_{CN} ist. Die Relation $\sim_\iota$ aus Definition 8.16 ist deshalb laut Corollar 8.21 eine Invariante, genau wie es in Beispiel 6.20 (für die dort $\sim$ heißende Relation) vermutet wurde.

Im Fall von AN_2 dagegen ist i keine lineare Invariante für E_{CN}. Das stimmt mit der Beobachtung aus Beispiel 6.20 überein, daß bei $G = \mathbb{Z}$, $E = E_{CN}$ die dortige Relation $\sim$ keine Invariante sein kann.

Dieses Beispiel zeigt den Nutzen von Endlichkeitsspezifikationen: Es ist gelungen, die Invariante von CN_G über das algebraische Netz AN_1 nachzuweisen; ein solcher Nachweis ist dagegen über AN_2 (das bis auf das Fehlen der Endlichkeitsterme in der zugrundeliegenden Spezifikation gleich AN_1 ist) nicht möglich, denn in manchen Interpretationen von AN_2 gilt gar keine entsprechende Invarianzeigenschaft.

Literatur

[1] N. BOURBAKI: *Théorie des ensembles.* Éléments de mathématique. Paris, Hermann, 1970.

[2] S. CHRISTENSEN, N. D. HANSEN: Coloured Petri Nets Extended with Place Capacities, Test Arcs and Inhibitor Arcs. – M. A. Marsan, ed.: *Application and Theory of Petri Nets 1993.* Lecture Notes in Computer Science **691**. Springer-Verlag, 1993. [ISBN 3-540-56863-8 und 0-387-56863-8]

[3] J. DESEL, K.-P. NEUENDORF, M.-D. RADOLA: Proving nonreachability by modulo-invariants. – *Theoretical Computer Science* **153** (1996) 49–64. [ISSN 0304-3975]

[4] H.-D. EHRICH, M. GOGOLLA, U. W. LIPECK: *Algebraische Spezifikation abstrakter Datentypen.* Stuttgart, B. G. Teubner, 1989. [ISBN 3-519-02266-4]

[5] H. EHRIG, B. MAHR: *Fundamentals of Algebraic Specification 1.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science **6**. Springer-Verlag, 1985. [ISBN 3-540-13718-1 und 0-387-13718-1]

[6] H. EHRIG, B. MAHR: *Fundamentals of Algebraic Specification 2.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science **21**. Springer-Verlag, 1990. [ISBN 3-540-51799-5 und 0-387-51799-5]

[7] H. EHRIG, J. LOECKX, B. MAHR: A Remark on the Equational Calculus for Many-Sorted Algebras with Possibly Empty Carrier Sets. – *Bulletin of the EATCS* # 30 (October 1986) 61–66.

[8] P. A. FOJER, D. A. SIMOVICI: *Mathematical Foundations of Computer Science* **1**. New York, Springer-Verlag, 1991. [ISBN 0-387-97450-4 und 3-540-97450-4]

[9] A. J. M. VAN GASTEREN, G. TEL: Comments on “On the proof of a distributed algorithm”: Always-true is not invariant. – *Information Processing Letters* **35** (1990) 277–279. [ISSN 0020-0190]

[10] H. J. GENRICH, K. LAUTENBACH, P. S. THIAGARAJAN: Elements of General Net Theory. – W. Brauer, ed.: *Net Theory and Applications. Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems. Hamburg, 1979.* Lecture Notes in Computer Science **84**. Springer-Verlag, 1980. 21–163. [ISBN 3-540-10001-6 und 0-387-10001-6]

[11] J. A. GOGUEN, J. MESEGUER: Completeness of many-sorted equational logic. – ACM *SIGPLAN Notices* **16** # 7 (July 1981) 24–32.

[12] J. A. GOGUEN, J. MESEGUER: Remarks on Remarks on Many-Sorted Equational Logic. – *Bulletin of the EATCS* # 30 (October 1986) 66–73.

[13] U. HUMMERT: *Algebraische Theorie von High-Level-Netzen.* Dissertation. Fachbereich 20 (Informatik) der Technischen Universität Berlin, 1989.

[14] K. JENSEN: *Coloured Petri Nets* **1**. Springer-Verlag, 1992. [ISBN 3-540-55597-9 und 0-387-55597-9]

[15] K. JENSEN: *Coloured Petri Nets* **2**. Springer-Verlag, 1995. [ISBN 3-540-58276-2 und 0-387-58276-2]

[16] E. JESSEN, R. VALK: *Rechensysteme: Grundlagen der Modellbildung.* Springer-Verlag, 1987. [ISBN 3-540-16383-2 und 0-387-16383-2]

[17] E. KINDLER: Invariants, composition, and substitution. – *Acta informatica* **32** (1995) 299–312. [ISSN 0001-5903]

[18] E. KINDLER, H. VÖLZER: *Flexibility in Algebraic Nets.* Informatik-Bericht **89**. Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Informatik, 1997.

[19] S. LANG: *Algebra.* [3rd ed.] Addison-Wesley, 1993. [ISBN 0-201-55540-9]

[20] K. LAUTENBACH: *Exakte Bedingungen der Lebendigkeit für eine Klasse von Petri-Netzen.* BMFT-GMD-**82**. Bonn, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1973.

[21] K. LAUTENBACH: Linear Algebraic Techniques for Place/Transition Nets. – W. Brauer, W. Reisig, G. Rozenberg, eds.: *Petri Nets: Central Models and Their Properties. Advances in Petri Nets 1986, Part I. Proceedings of an Advanced Course. Bad Honnef, September 1986.* Lecture Notes in Computer Science **254**. Springer-Verlag, 1987. 142–167. [ISBN 3-540-17905-4 und 0-387-17905-4]

[22] S. MAC LANE: *Categories for the Working Mathematician.* [2nd ed.] Graduate Texts in Mathematics **5**. Springer-Verlag, 1998. [ISBN 0-387-98403-8]

[23] G. MEMMI, G. ROUCAIROL: Linear Algebra in Net Theory. – W. Brauer, ed.: *Net Theory and Applications. Proceedings of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems. Hamburg, 1979.* Lecture Notes in Computer Science **84**. Springer-Verlag, 1980. 213–223. [ISBN 3-540-10001-6 und 0-387-10001-6]

[24] J. MESEGUER, J. A. GOGUEN: Initiality, induction, and computability. – M. Nivat, J. C. Reynolds, eds.: *Algebraic methods in semantics.* Cambridge University Press, 1985. 459–541. [ISBN 0521267935]

[25] J. MESEGUER, U. MONTANARI: Petri Nets Are Monoids. – *Information and Computation* **88** (1990) 105-155. [ISSN 0890-5401]

[26] B. MÖLLER: *Lineare Invarianten algebraischer Petrinetze.* Studienarbeit. Universität Hamburg, 1999.

[27] J PADBERG: *Abstract Petri Nets: Uniform Approach and Rule-Based Refinement.* Dissertation. TU Berlin, 1996.

[28] C. A. PETRI: Nets, time and space. – *Theoretical Computer Science* **153** (1996) 3–48. [ISSN 0304-3975]

[29] W. REISIG: Petri nets with individual tokens. – *Theoretical Computer Science* **41** (1985) 185–213. [ISSN 0304-3975]

[30] W. REISIG: Petri nets and algebraic specifications. – *Theoretical Computer Science* **80** (1991) 1–34. [ISSN 0304-3975]

[31] K. SCHMIDT: *Symbolische Analysemethoden für algebraische Petrinetze.* Berlin, Dieter Bertz Verlag, 1996. [ISBN 3-929470-54-3]

[32] H. SCHUBERT: *Kategorien* **I**. Heidelberger Taschenbücher **65**. Springer-Verlag, 1970.

[33] J. VAUTHERIN: Parallel systems specifications with coloured Petri nets and algebraic specifications. – G. Rozenberg, ed.: *Advances in Petri Nets 1987.* Lecture Notes in Computer Science **266**. Springer-Verlag, 1987. 293–308. [ISBN 3-540-18086-9 und 0-387-18086-9]

[34] H. VÖLZER: *Verifikation Verteilter Algorithmen mit Algebraischen Netzen.* Diplomarbeit. Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Informatik, 1995.

[35] W. WECHLER: *Universal Algebra for Computer Scientists.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science **25**. Springer-Verlag, 1992. [ISBN 3-540-54280-9 und 0-387-54280-9]

Index

$[\,.\,]$, 15
$[\,.\,]_s$, 15
$\emptyset_A$, 47
$\rightarrow_E$, 55
$\sim_E$, 60
$\sim_{E_{CN}}$, 82
$\sim_\iota$, 77
$[M]$, 67
$[M\rangle_E$, 56
$[m\rangle_E$, 56
$\circ$, 17
$\circ_{a,b,c}$, 17
$\vdash_{\mathcal{R}}$, 23
$\equiv_G^{\mathfrak{T}_\Sigma(X)}$, 26
$\{\!\{x\}\!\}$, 47
$\{\!\{x_1,\ldots,x_k\}\!\}$, 47
$\underset{Y}{\longleftarrow}$, 67, 70

$(A_1)_{\Sigma_0}$, 34
$(A_1)_{SPEC_0}$, 35
$\mathrm{Abb}(A,B)$, 7
ableitbar, 23
Ableitung, 23
Abschluß, 23
addierbar, 47
aktiviert, 55
Algebra, 11
  Σ-Algebra, 11
  $SPEC$-Algebra, 22
  $SPECF$-Algebra, 38
  trivial, 11
algebraische Gewichtung, 67
algebraische Inzidenzmatrix, 66
algebraische Spezifikation, 21
algebraisches Netz, 62
Alg(Σ), 18
Alg$(SPEC)$, 32
always-true, 58
AN, 62
Anfangsmarkierung, 57
arc, 52
Argumentsorte, 7
auf einer Stelle liegende Marken, 54
Auswertung, 12
auswertungsverträglich, 48
Axiom, 23

Belegung, 12
Beweis, 23
beweisbar, 23

carrier set, 11
χ_A, 47
closure, 23
$\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(A)$, 23
(CN, M_0)-Netzsysteme, 57
colour, 52
complete, 29

$\mathfrak{D}$, 66
doppelte Substition, 24
$\mathfrak{D}_{p,t}$, 66

$\rightarrow_E$, 55
$\sim_E$, 60
echter Unterterm, 9
$\sim_{E_{CN}}$, 82
E_{CN}-zulässig, 70
einfache Substition, 24
Einschränkung, 35, 45
  einer Belegung, 13
  einer Substitution, 10
Element, 46
Elementanzahl, 46
Elementarschritt, 56
endlich agierender Schritt, 56
endliche gewichtete Menge, 46
Endlichkeitsspezifikation, 38
Endlichkeitsterm, 38
Ereignis, 54
erreichbar, 56
Erweiterung
  einer Endlichkeitsspezifikation, 45
  einer Gleichungsspezifikation, 34
  einer Signatur, 34
  konservativ, 35

vorsichtig, 35, 45
eval, 12
eval_s, 12

Farbmenge, 52
final, 18
in C, 19
Σ-Algebra, 12, 19
$SPEC$-Algebra, 32
$SPECF$-Algebra, 43
Fin_s, 11
Fin_Σ, 11
Folgerung, 23
formale Gleichung, 21
formaler Beweis, 23
$F_{p,t}$, 63
frei
Σ-Algebra, 19
$SPEC$-Algebra, 32
$F_{t,p}$, 63

$\mathcal{G}$, 22
gefärbtes Netz, 52
gefärbtes Netzsystem, 57
generiert, 13
gesättigt, 26
gewichtete Menge, 46
leer, 46
Gewichtung, 46, 66
algebraisch, 67
Gleichung, 21
Gleichungsspezifikation, 21
Grundterm, 8
Gruppe
kommutativ, 29
$\mathcal{G}_{S,\Omega,Xi}$, 22
gültig, 21

Halbgruppe mit neutralem Element, 34
hom Mengen, 17
$\mathrm{hom}_{\boldsymbol{C}}(a,b)$, 17
Homomorphismus, 13, 22

Identität, 17
Induktionsbereich, 57, 59
induktive Invariante, 58
initial, 18
in C, 19
Σ-Algebra, 12, 19
$SPEC$-Algebra, 32
$\mathrm{interpret}_A$, 13, 63, 76
Interpretation, 63
interpretierbar, 63
Invariante, 57–59, 82
induktiv, 58
linear, 65, 71
Inverses, 17
Inzidenzmatrix, 65
algebraisch, 66
ι, 77
$\sim_\iota$, 77
isomorph, 17
Isomorphismus, 17

kanonische Abbildung, 15, 66
Kante, 52
Kantenbeschriftung, 52
Kategorie, 17
kommutative Gruppe, 29
Komposition, 14, 17
Kongruenz, 15, 22, 27
konservative Erweiterung, 35
Konstante, 11
Konstantensymbol, 7
korrekt, 25, 39

Länge eines Beweise, 23
leere gewichtete Menge, 46
leere Multimenge, 47
lineare Invariante, 65
für E_{CN}, 71
linke Seite, 21
lokal-endlich agierender Schritt, 56

$[M]$, 67
$\mathcal{M}(A)$, 46
$\mathcal{M}^{\pm}(A)$, 46
$\mathcal{M}^{\pm}_{\mathrm{fin}}(A)$, 46
M_{CN}, 54
Marke, 54
Markierung, 54
$[M\rangle_E$, 56
$[m\rangle_E$, 56
Mehrfachkante, 53

$\mathcal{M}^{\pm}_{F}(A)$, 48
$\mathcal{M}^{\pm}_{f}(A)$, 48
$\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(A)$, 46
minimales Variablensystem, 9
$\mathcal{M}^{\pm}_{M_1\bullet}(A_2)$, 50
$\mathcal{M}^{\pm}_{\bullet M_2}(A_1)$, 50
Modell, 22, 38
Morphismus, 17
Multimenge, 46
    leer, 47

$\mathbb{N}$, 7
n-faches Element, 46
Nachfolgemarkierung, 54–55
Nebenläufigkeit, 52
Netz
    algebraisch, 62
    gefärbt, 52
Netzsystem
    gefärbt, 57
nichtnegativ gewichtete Menge, 46

Objekt, 17
Operation, 11
Operationssymbol, 7

$\mathcal{P}(x)$, 18
place, 52, 62
Potenzmenge, 18
Prä-Schritt, 54
Prämisse, 23

Quotient, 15, 22

$\mathcal{R}$, 23, 24
$\vdash_{\mathcal{R}}$, 23
rechte Seite, 21
Reflexivität, 24
Regelsystem, 23
Restriktion
    einer Belegung, 13
    einer Substitution, 10
$\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}$, 39
$\mathcal{R}^{\mathrm{fin}}_{SPEC}$, 39
$\mathcal{R}_{S,\Omega,\Xi}$, 24

S-Invariante, 65
schalten, 54
Schaltmodus, 52
Schaltregel, 54
Schlußregel, 22
Schritt, 55
    endlich agierend, 56
    lokal-endlich agierend, 56
Seite (einer algebraische Gleichung), 21
Σ-Algebra
    final, 12, 19
    frei, 19
    initial, 12, 19
    trivial, 11
Σ-generiert, 13
Signatur, 7
sort, 7, 22
Sorte, 7
    Argumentsorte, 7
    Wertsorte, 7
sort_X, 9
sound, 25
Spalte, 66
$SPEC$-Algebra, 22
    final, 32
    frei, 32
    initial, 32
$SPEC_{\mathrm{cl}}$, 32
$SPECF$-Algebra, 38
    final, 43
Spezifikation
    algebraisch, 21
    Gleichungs-, 21
Stelle, 52, 62
Stellen-Transitions-Netz, 65
Subsignatur, 34
Subspezifikation, 34, 45
Substitution, 9
    doppelt, 24
    einfach, 24
Substitutionsauswertung, 9
Summe einer Familie von gewichteten Mengen, 47
supp, 46
support, 46
Symmetrie, 24

Term, 7–8
term(a), 8
Termalgebra, 11
Tiefe, 8
$\mathfrak{T}_{\Omega}$, 8
$\mathfrak{T}_{\Omega,s}$, 8
$\mathfrak{T}_{\Omega,s}(X)$, 8
$\mathfrak{T}_{\Omega}(X)$, 8
Träger, 46
Trägermenge, 11
$Trans_E$, 54–55
Transition, 52, 62
Transitionssystem, 54
Transitivität, 24
triviale Algebra, 11
triviale Σ-Algebra, 11
$\mathfrak{T}_{\Sigma}$, 11
$\mathfrak{T}_{\Sigma}(X)$, 11
$\mathfrak{T}_{SPEC}$, 32
$\mathfrak{T}_{SPEC}(X)$, 28
$\mathfrak{T}_{SPEC,s}(X)$, 28

unendliche gewichtete Menge, 46
Universum, 18
Unterkategorie, 32
  voll, 32
Unterterm, 9

var(T), 9
Variable, 7
Variablensystem, 7
  einer formalen Gleichung, 21
  minimal, 9
var$_s(T)$, 9
verträglich, 49
volle Unterkategorie, 32
vollständig, 29
vorsichtige Erweiterung, 35, 45

Wertsorte, 7
Wort, 7

$\{\!|x|\!\}$, 47
$\{\!|x_1, \ldots, x_k|\!\}$, 47

$\xleftarrow[Y]{}$, 67, 70

Zeile, 66
zulässig, 70
  E_{CN}-zulässig, 70
Zustand, 54
Zustandsübergangsrelation, 54

Ich erkläre hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig erstellt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Hamburg, den 1. Oktober 1999